Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Les transformations du plan

التحويلات في المستوى

Cours de maths Tronc Commun : translation, symétrie centrale et axiale, homothétie, propriétés de conservation et images de figures, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Translation, symétrie centrale et symétrie axiale
- Homothétie de centre Ω et de rapport k
- Propriétés de conservation
- Images d'une droite, d'un segment et d'un cercle
- Application : la droite des milieux

بالعربية 💡 ندرس الإزاحة والتماثل المركزي والتماثل المحوري والتحاكي، وخصائص كل منها: الحفاظ على المسافات أو ضربها في lkl، والحفاظ على الاستقامية والتوازي والمنتصف.

01 Définitions

تعاريف

Transformation	Image M' de M	Point(s) invariant(s)
Translation de vecteur $\vec{u}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$
Symétrie centrale de centre Ω	Ω est le milieu de $[MM']$	Ω
Symétrie axiale d'axe (Δ)	(Δ) est la médiatrice de $[MM']$ ($M' = M$ si $M \in (\Delta)$)	les points de (Δ)
Homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 0$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$	Ω (si $k \neq 1$)

REMARQUES

La symétrie centrale de centre Ω est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1.

Si $k > 0$, M' est sur la demi-droite $[\Omega M)$; si $k < 0$, M' est de l'autre côté de Ω.

EN COORDONNÉES

Translation de vecteur $\vec{u}(a;b)$: $M'(x+a;y+b)$.

Symétrie de centre $\Omega(\alpha;\beta)$: $M'(2\alpha - x; 2\beta - y)$.

Homothétie $h(\Omega; k) : M'(\alpha + k(x - \alpha); \beta + k(y - \beta))$.

بالعربية 💡 الإزاحة: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. التماثل المركزي: Ω منتصف $[MM']$. التماثل المحوري: المحور واسط $[MM']$. التحاكي: $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

02 Propriétés

الخصائص

TRANSLATIONS ET SYMÉTRIES (ISOMÉTRIES)

Elles conservent les distances ($M'N' = MN$), donc aussi les angles, l'alignement, le milieu et le parallélisme. Pour une translation ou une symétrie centrale : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ ou $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$.

HOMOTHÉTIE

Si $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$, alors l'homothétie conserve l'alignement, le parallélisme, le milieu et les angles ; elle multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.

$$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad M'N' = |k| \times MN$$

IMAGES DE FIGURES

L'image d'une droite est une droite parallèle (ou la même) ; l'image d'un segment est un segment.

L'image d'un cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre $O' = f(O)$ et de rayon r (isométrie) ou $|k|r$ (homothétie).

EXEMPLE — DROITE DES MILIEUX

ABC est un triangle, I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie B sur I et C sur J, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \frac{BC}{2}$.

⚠ PIÈGE

Une homothétie de rapport négatif multiplie les distances par $|k|$, pas par k : avec $k = -2$, les longueurs sont doublées.

بالعربية 💡 التحاكي يحافظ على الاستقامية والتوازي والمنتصف والزوايا، ويضرب الأطوال في $|k|$ والمساحات في k^2.

03 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Exercice 1 — Constructions

Tracer un triangle ABC et un point Ω. Construire l'image du triangle par :

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. La symétrie de centre Ω.
3. La symétrie d'axe (BC).
4. L'homothétie de centre A et de rapport 2.

$A \mapsto B$, et on reporte $\overrightarrow{AB}$ à partir de B et de C.

On prolonge $[M\Omega]$ d'une longueur égale de l'autre côté de Ω.

B et C sont invariants ; on construit le symétrique de A par rapport à (BC).

A est invariant ; B' et C' sont tels que $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 — En coordonnées

Dans un repère, déterminer l'image de $A(1;3)$ par :

1. La translation de vecteur $\vec{u}(2;-1)$.
2. La symétrie de centre $\Omega(1;1)$.
3. L'homothétie de centre O et de rapport -2.
4. La symétrie d'axe l'axe des abscisses.

$(3;2)$.

$(2-1;2-3) = (1;-1)$.

$(-2;-6)$.

$(1;-3)$.

Exercice 3 — Longueurs et aires

h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -3. Un segment $[AB]$ mesure 2 cm et un triangle a une aire de 5 cm^2.

1. Que deviennent ces mesures par h ?
2. Même question avec une translation.

Par h : $A'B' = 3 \times 2 = 6$ cm et l'aire est multipliée par 9 : 45 cm^2.

Par une translation : inchangées (2 cm et 5 cm^2).

Exercice 4 — Trouver une homothétie

A, B, A', B' sont tels que $\overrightarrow{A'B'} = -2\overrightarrow{AB}$ et les droites (AB) et $(A'B')$ sont distinctes.

1. Montrer qu'il existe une homothétie qui envoie A sur A' et B sur B' ; préciser son rapport et construire son centre.

Le rapport est $k = -2$.

Le centre Ω est l'intersection des droites (AA') et (BB'), sécantes car $k \neq 1$; on vérifie $\overrightarrow{\Omega A'} = -2\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = -2\overrightarrow{\Omega B}$ par le théorème de Thalès.

Exercice 5 — Droite des milieux

ABC est un triangle, I, J, K les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$.

1. Montrer que $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \dfrac{BC}{2}$.
2. Montrer que $IJKB$ est un parallélogramme.

L'homothétie $h(A; \frac{1}{2})$ donne $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \dfrac{BC}{2}$.

$\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK}$, donc $IJKB$ est un parallélogramme.

Exercice 6 — Image d'un cercle

(C) est le cercle de centre $O(2;1)$ et de rayon 3. Déterminer son image par :

1. La translation de vecteur $\vec{u}(-1;4)$.
2. L'homothétie de centre $\Omega(0;1)$ et de rapport -2.

Translation : cercle de centre $(1;5)$ et de rayon 3.

Homothétie : $O' = (0 - 2\times 2; 1 - 2\times 0) = (-4;1)$, rayon $2 \times 3 = 6$.

Exercice 7 — Image d'une droite

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1;2)$ et de rapport 3.

1. Exprimer les coordonnées de $M' = h(M)$ en fonction de celles de $M(x;y)$.
2. Déterminer l'image de la droite $(D) : y = x$.

$x' = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$ et $y' = 2 + 3(y-2) = 3y - 4$.

$x = \dfrac{x'+2}{3}$ et $y = \dfrac{y'+4}{3}$; $y = x$ donne $y' + 4 = x' + 2$, soit $y' = x' - 2$: l'image est la droite $y = x - 2$, parallèle à (D).

Exercice 8 — Symétrie axiale

Dans un repère orthonormé, déterminer le symétrique de $A(3;1)$ par rapport à :

1. L'axe des ordonnées.
2. La droite $y = x$.
3. La droite $x = 2$.

$(-3;1)$.

$(1;3)$: on échange les coordonnées.

$(1;1)$: 2 est le milieu des abscisses 3 et 1.

Exercice 9 — Centre de gravité et homothétie

ABC est un triangle de centre de gravité G ; A', B', C' sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1. Montrer que l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
2. En déduire que les côtés du triangle $A'B'C'$ sont parallèles à ceux de ABC et que son aire vaut le quart de celle de ABC.

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ donne $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, donc $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; de même pour B et C.

L'homothétie transforme chaque côté en un côté parallèle ; elle multiplie les longueurs par $\frac{1}{2}$ et les aires par $\frac{1}{4}$.

04 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

Je dois…	Outil / formule
Construire l'image par une translation	Reporter le vecteur $\vec{u}$
Construire l'image par une homothétie	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$
Calculer une image en coordonnées	Formules de la partie Définitions
Prouver un parallélisme	Image d'une droite par une homothétie
Trouver l'image d'un cercle	Image du centre, rayon $\times \lvert k \rvert$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Omega \text{ milieu de } [MM']$$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M} \quad ; \quad \overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$$

$$\text{longueurs} \times |k| \quad ; \quad \text{aires} \times k^2$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Multiplier les longueurs par k au lieu de $|k|$.
- Oublier que l'image d'une droite est parallèle.
- Confondre symétrie centrale et symétrie axiale.
- Prendre Ω comme image de M au lieu du milieu.
- Oublier l'invariance des points de l'axe.

Lexique français — arabe · معجم المصطلحات

Français	العربية
Transformation	تحويل
Translation	إزاحة
Symétrie centrale	تماثل مركزي
Symétrie axiale	تماثل محوري
Homothétie	تحاك
Centre	مركز
Rapport	نسبة
Axe	محور
Image	صورة
Point invariant	نقطة صامدة
Isométrie	تقايس
Médiatrice	واسط قطعة

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A