Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Statistiques

الإحصاء

Cours de maths Tronc Commun : effectifs, fréquences, regroupement en classes, mode, moyenne, médiane, variance et écart-type, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Vocabulaire et tableaux statistiques
- Représentations graphiques
- Mode, moyenne et médiane
- Étendue, variance et écart-type
- Effet d'un changement de données

بالعربية 💡 الإحصاء يمكن من تلخيص معطيات كثيرة بأعداد قليلة: المنوال والمعدل الحسابي والوسيط والمغايرة والانحراف الطرازي.

01 Vocabulaire et tableaux

المفردات والجداول

DÉFINITION — VOCABULAIRE

On étudie un caractère (ou variable) sur une population formée d'individus. Le caractère est qualitatif (couleur, filière) ou quantitatif : discret (nombre d'enfants) ou continu (taille), regroupé alors en classes $[a;b[$. Les valeurs prises sont les modalités.

EFFECTIFS ET FRÉQUENCES

L'effectif n_i d'une valeur x_i est le nombre d'individus qui la prennent ; $N=\sum n_i$ est l'effectif total.

La fréquence est $f_i=\dfrac{n_i}{N}$ (souvent en %) ; la somme des fréquences vaut 1.

L'effectif cumulé croissant d'une valeur est la somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales.

Série exemple : notes de 20 élèves

Note x_i	8	10	12	14	16	Total
Effectif n_i	3	5	6	4	2	20
Fréquence (%)	15	25	30	20	10	100
Effectif cumulé	3	8	14	18	20	–

REPRÉSENTATIONS

Diagramme en bâtons (caractère discret), histogramme (classes : aires proportionnelles aux effectifs), diagramme circulaire (angle $= f_i \times 360°$), polygone des effectifs cumulés.

بالعربية 💡 الحصيص n_i هو عدد الأفراد الذين يأخذون القيمة x_i، والتردد $f_i = \frac{n_i}{N}$، ومجموع الترددات يساوي 1.

02 Paramètres de position

وسائط الموضوع

DÉFINITION — MODE, MOYENNE, MÉDIANE

Le mode est la valeur (ou la classe) de plus grand effectif.

La moyenne : $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$; pour des classes, on utilise les centres des classes.

La médiane Me partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif : si N est impair, c'est la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$; si N est pair, c'est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$.

SUR LA SÉRIE EXEMPLE

Mode $= 12$. $\bar{x} = \frac{24+50+72+56+32}{20} = \frac{234}{20} = 11{,}7$.

$N = 20$: la médiane est la moyenne des 10e et 11e valeurs ; d'après les effectifs cumulés ($8 < 10$ et $11 \leq 14$), ces deux valeurs valent 12 : $Me = 12$.

PIÈGE

La médiane se calcule sur la série rangée dans l'ordre croissant, en tenant compte des effectifs (et non au milieu du tableau des valeurs).

بالعربية 💡 المنوال: القيمة الأكثر تكراراً. الوسيط: القيمة التي تقسم السلسلة المرتبة إلى جزأين متساويين.

03 Paramètres de dispersion

وسائط التشتت

DÉFINITION — ÉTENDUE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

Étendue : plus grande valeur − plus petite valeur.

Variance : $V = \frac{1}{N}\sum n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$.

Écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$. Plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.

SUR LA SÉRIE EXEMPLE

$\sum n_i x_i^2 = 3 \times 64 + 5 \times 100 + 6 \times 144 + 4 \times 196 + 2 \times 256 = 2852$.

$V = \dfrac{2852}{20} - 11{,}7^2 = 142{,}6 - 136{,}89 = 5{,}71$; $\sigma = \sqrt{5{,}71} \approx 2{,}39$. Étendue $= 16 - 8 = 8$.

EFFET D'UN CHANGEMENT DE DONNÉES

Si on ajoute b à toutes les valeurs : la moyenne augmente de b, l'écart-type ne change pas. Si on les multiplie par $a > 0$: la moyenne et l'écart-type sont multipliés par a.

بالعربية 💡 المغايرة V والانحراف الطرازي $\sigma = \sqrt{V}$ يقيسان تشتت القيم حول المعدل الحسابي.

04 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Exercice 1 — Vocabulaire

Préciser la nature du caractère étudié :

1. La filière choisie par les élèves de Tronc Commun.
2. Le nombre de frères et sœurs.
3. La taille en cm.
4. La note sur 20 à un contrôle.
5. Le temps de trajet maison-lycée.

Qualitatif.

Quantitatif discret.

Quantitatif continu.

Quantitatif discret (souvent traité comme continu si les notes sont décimales).

Quantitatif continu.

Exercice 2 — Fréquences et effectifs cumulés

On a relevé le nombre d'enfants de 25 familles : 0 enfant : 3 ; 1 : 6 ; 2 : 9 ; 3 : 5 ; 4 : 2.

1. Calculer les fréquences en %.
2. Calculer les effectifs cumulés croissants.
3. Calculer l'angle de chaque secteur d'un diagramme circulaire.

$12\ \%$; $24\ \%$; $36\ \%$; $20\ \%$; $8\ \%$.

3 ; 9 ; 18 ; 23 ; 25.

$43{,}2^\circ$; $86{,}4^\circ$; $129{,}6^\circ$; 72° ; $28{,}8^\circ$.

Exercice 3 — Mode, moyenne, médiane (N impair)

Série : $2, 5, 7, 7, 9, 10, 12$.

1. Calculer le mode, la moyenne, la médiane et l'étendue.

Mode : 7.

Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{52}{7} \approx 7{,}43$.

Médiane : $N = 7$ impair, 4e valeur : $Me = 7$.

Étendue : $12 - 2 = 10$.

Exercice 4 — Médiane (N pair)

Série : $11, 3, 15, 8, 4, 10$.

1. Ranger la série et calculer sa médiane et sa moyenne.

Série rangée : $3, 4, 8, 10, 11, 15$.

$N = 6$ pair : $Me = \dfrac{8 + 10}{2} = 9$; $\bar{x} = \dfrac{51}{6} = 8{,}5$.

Exercice 5 — Série en classes

Tailles de 20 élèves : $[150; 160[$: 4 ; $[160; 170[$: 10 ; $[170; 180[$: 5 ; $[180; 190[$: 1.

1. Donner la classe modale.
2. Calculer la moyenne avec les centres des classes.
3. Déterminer la classe médiane.

Classe modale : $[160; 170[$.

Centres $155, 165, 175, 185$: $\bar{x} = \dfrac{620 + 1650 + 875 + 185}{20} = \dfrac{3330}{20} = 166{,}5$ cm.

Effectifs cumulés 4 ; 14 ; 19 ; 20 : les 10e et 11e valeurs sont dans $[160; 170[$, qui est la classe médiane.

Exercice 6 — Variance et écart-type

Série : $2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9$.

1. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type.

$\bar{x} = \dfrac{40}{8} = 5$.

Carrés des écarts : $9, 1, 1, 1, 0, 0, 4, 16$, de somme 32 : $V = \dfrac{32}{8} = 4$.

$\sigma = \sqrt{4} = 2$.

Exercice 7 — Changement de données

Une série de notes a pour moyenne 11 et pour écart-type 3.

1. Le professeur ajoute 2 points à chaque élève : quelles sont la nouvelle moyenne et le nouvel écart-type ?
2. Même question si toutes les notes sont multipliées par $1{,}5$.

Moyenne 13, écart-type 3 (inchangé).

Moyenne $16{,}5$, écart-type $4{,}5$.

Exercice 8 — Moyenne de deux groupes

Dans un lycée, la classe A (20 élèves) a une moyenne de 12 et la classe B (30 élèves) une moyenne de 10.

1. Calculer la moyenne de l'ensemble des 50 élèves. Pourquoi n'est-ce pas 11 ?

$$\bar{x} = \frac{20 \times 12 + 30 \times 10}{50} = \frac{540}{50} = 10{,}8.$$

Les deux classes n'ont pas le même effectif : c'est une moyenne pondérée, pas la moyenne de 12 et 10.

Exercice 9 — Valeur manquante

1. La série 8, 12, x, 15 a pour moyenne 12. Calculer x.
2. Une série de 5 valeurs a pour moyenne 10 et pour variance 4. On ajoute la valeur 10. Calculer la nouvelle moyenne et la nouvelle variance.

$8 + 12 + x + 15 = 48$, donc $x = 13$.

Somme 50 puis 60 pour 6 valeurs : moyenne 10. $\sum (x_i - 10)^2 = 5 \times 4 = 20$; la nouvelle valeur ajoute 0 : $V = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$.

05 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

Je dois…	Outil / formule
Calculer une fréquence	$f_i = \frac{n_i}{N}$
Calculer une moyenne	$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}$ (centres des classes)
Trouver la médiane	Ranger la série, utiliser les effectifs cumulés
Mesurer la dispersion	$V = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$; $\sigma = \sqrt{V}$
Comparer deux séries	Moyennes et écarts-types

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \, x_i}{N}$$

$$V = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$V = \frac{1}{N} \sum n_i \, x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Calculer la médiane sans ranger la série.
- Oublier de pondérer par les effectifs.
- Faire la moyenne de deux moyennes de groupes inégaux.
- Oublier de retrancher $\bar{x}^2$ dans la variance.
- Confondre classe modale et classe médiane.

Lexique français — arabe · معجم المصطلحات

Français	العربية
Population	ساكنة
Individu	فرد
Caractère	ميزة
Modalité	قيمة الميزة
Effectif	حصيص
Fréquence	تردد
Effectif cumulé	الحصيص المتراكم
Classe	فئة
Mode	منوال
Moyenne	المعدل الحسابي
Médiane	الوسيط
Écart-type	الانحراف الطرازي

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A