Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

La projection dans le plan

الإسقاط في المستوى

Projection dans le plan au Tronc Commun : construction, milieu, colinéarité et théorème de Thalès, avec schéma et 8 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Projection sur une droite parallèlement à une autre
- Propriétés de la projection
- Théorème de Thalès

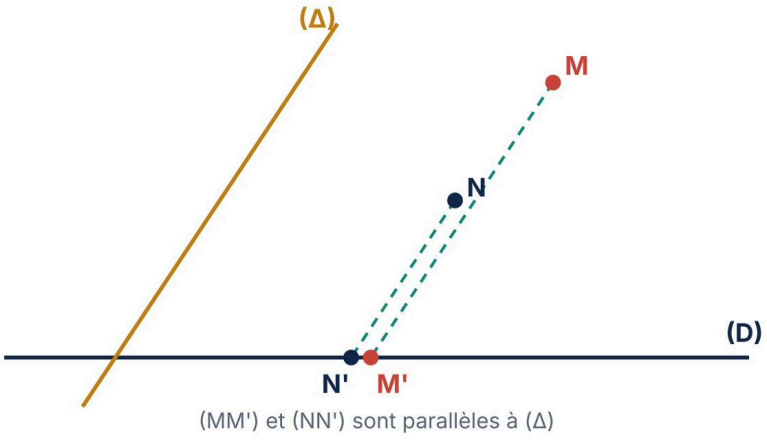
بالعربية 💡 الإسقاط على مستقيم بتواز مع مستقيم آخر يحافظ على المنتصف وعلى معامل الاستقامية، ومنه نستنتج مبرهنة طاليس.

01 Projection sur une droite parallèlement à une autre

الإسقاط على مستقيم بتواز مع مستقيم

DÉFINITION

(D) et (Δ) sont sécantes. Le projeté M' de M est l'intersection de (D) et de la parallèle à (Δ) passant par M. On note $p(M) = M'$.



Construction des projetés sur (D) parallèlement à (Δ).

- Si $M \in (D)$, $p(M) = M$.
- Si $(\Delta) \perp (D)$, la projection est orthogonale : le projeté est le pied de la perpendiculaire.
- Tous les points d'une droite parallèle à (Δ) ont le même projeté.

بالعربية 💡 مسقط النقطة هو نقطة تقاطع المستقيم المستهدف مع المستقيم المار من النقطة والموازي لاتجاه الإسقاط.

02 Propriétés de la projection

خاصيات الإسقاط

CONSERVATION DU MILIEU

Si I est le milieu de $[AB]$, I' est le milieu de $[A'B']$.

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$$

EXEMPLE

$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ implique $\overrightarrow{A'C'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A'B'}$.

PIÈGE

La projection ne conserve pas les longueurs en général. Elle conserve le milieu et les rapports sur une même droite ou sur des droites parallèles, lorsque les longueurs projetées au dénominateur ne sont pas nulles.

03 Théorème de Thalès

مبرهنة طاليس

ÉNONCÉ

(AB) et (AC) sont sécantes en A, $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$. Si $(MN) \parallel (BC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Réciproque : si M et N sont placés dans le même ordre que B et C par rapport à A et si les deux premiers rapports sont égaux, alors (MN) est parallèle à (BC).

JUSTIFICATION PAR PROJECTION

Projeter sur (AC) parallèlement à (BC) envoie A sur A, B sur C et M sur N. Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$. Les rapports de longueurs valent $|k|$.

بالعربية 💡 نستنتج مبرهنة طاليس من خاصية الحفاظ على معامل الاستقامية بالإسقاط.

04 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Construire des projetés

1. Tracer deux droites sécantes (D) et (Δ) et un triangle ABC. Construire les projetés des sommets sur (D) parallèlement à (Δ). Quand deux points ont-ils le même projeté ?

Par chaque sommet tracer la parallèle à (Δ) ; son intersection avec (D) est le projeté. Deux points distincts ont le même projeté si leur droite est parallèle à (Δ).

Exercice 2 — Milieu

1. I est le milieu de $[BC]$ dans un triangle ABC. Projection sur (AB) parallèlement à (AC) : déterminer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ et $p(I)$.

$p(A) = A$, $p(B) = B$, $p(C) = A$. Le milieu est conservé, donc $p(I)$ est le milieu de $[BA]$.

Exercice 3 — Coefficient de colinéarité

1. A, B, C, E alignés avec $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC}$. Exprimer les vecteurs projetés et montrer que A' est le milieu de $[C'E']$.

$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'E'} = -\overrightarrow{A'C'}$. La somme des deux derniers vecteurs est nulle : A' est le milieu.

Exercice 4 — Thalès

1. $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 7{,}5$, $M \in [AB]$, $AM = 2$. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N. Calculer AN et MN.

$AM/AB = 1/3 = AN/AC = MN/BC$. Donc $AN = 3$ et $MN = 2{,}5$.

Exercice 5 — Partager un segment

1. Partager [AB] en trois parties égales à la règle non graduée et au compas ; justifier par projection.

Tracer une demi-droite issue de A distincte de (AB) et y reporter trois longueurs égales aux points P_1, P_2, P_3. Tracer (P_3B) puis ses parallèles par P_1, P_2 : intersections M_1, M_2 avec $[AB]$.

La projection conserve les coefficients : $\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP_3}$ donne $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; de même pour M_2 avec $2/3$.

Exercice 6 — Parallélogramme

1. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Projection sur (AB) parallèlement à (AD) : déterminer $p(C)$, $p(D)$ et $p(O)$.

$p(C) = B, p(D) = A$. Comme O est le milieu de $[AC]$, $p(O)$ est le milieu de $[AB]$.

Exercice 7 — Dans un repère

1. $M(3;4)$: projeté sur chaque axe parallèlement à l'autre axe ?
2. Projeté M' sur l'axe des abscisses parallèlement à $y = x$?

$(3;0)$ et $(0;4)$.

$M'(a;0)$ et $\overrightarrow{MM'} = (a-3;-4)$ colinéaire à $(1;1)$: $a - 3 = -4$, donc $M'(-1;0)$.

Exercice 8 — Centre de gravité et projection

1. I milieu de $[BC]$, G centre de gravité de ABC avec $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Montrer les propriétés correspondantes pour les projetés.
2. Si $(MN) \parallel (D)$, montrer que $M'N' = MN$.

Conservation du milieu : I' milieu de $[B'C']$; conservation du coefficient : $\overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I'}$.

MM' et NN' sont parallèles à (Δ) ; MN est parallèle à $M'N'$. Le quadrilatère est un parallélogramme (ou les points sont déjà sur (D)), donc les longueurs sont égales.

05 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

- Construire : parallèle à la direction, puis intersection avec la droite cible.
- Le milieu et le coefficient de colinéarité sont conservés.
- Thalès calcule une longueur ; sa réciproque prouve un parallélisme.

⚠ **TOP 5 DES ERREURS**

- Projeter avec la mauvaise direction.
- Croire que toutes les longueurs sont conservées.
- Appliquer Thalès sans parallèles.
- Oublier la condition d'ordre dans la réciproque.
- Confondre projection et projection orthogonale.

Français	العربية
Projection	إسقاط
Projeté	مسقط
Parallèlement à	بتواز مع
Projection orthogonale	إسقاط عمودي
Droites sécantes	مستقيمان متقاطعان
Droites parallèles	مستقيمان متوازيان
Milieu	منتصف
Coefficient de colinéarité	معامل الاستقامية
Théorème de Thalès	مبرهنة طاليس
Réciproque	عكس
Parallélogramme	متوازي الأضلاع
Repère	معلم

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A