Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Le produit scalaire

الجداء السلمي

Produit scalaire au Tronc Commun : projection, cosinus, orthogonalité, Al-Kashi, médiane et équations de droites, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Définitions
- Propriétés et orthogonalité
- Expression analytique

بالعربية 💡 الجداء السلمي يحسب باستعمال المسقط العمودي أو الزاوية أو الإحداثيات في معلم متعامد ممنظم، ويستعمل لإثبات التعامد.

01 Définitions

تعاريف

PRODUIT SCALAIRE PAR PROJECTION

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}, A \neq B$. Si C' est le projeté orthogonal de C sur (AB), le produit est $AB \times AC'$ si les vecteurs ont même sens, l'opposé sinon. Si un vecteur est nul, le produit est nul.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

EXEMPLE

$AB = 4, AC = 3$, angle $60°$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times 1/2 = 6$.

بالعربية 💡 الجداء السلمي هو جداء المنظمين في جيب تمام الزاوية، ويمكن حسابه بالمسقط العمودي.

02 Propriétés et orthogonalité

الخاصيات والتعامد

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

AL-KASHI ET THÉORÈME DE LA MÉDIANE

Dans un triangle ABC, I milieu de BC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos\widehat{A}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

EXEMPLE

$AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$: $\cos\widehat{A} = (25 + 64 - 49)/80 = 1/2$, donc $\widehat{A} = 60°$.

03 Expression analytique

الصيغة التحليلية

DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Pour $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

VECTEUR NORMAL

Un vecteur non nul $\vec{n} = (a; b)$ est normal à une droite s'il est orthogonal à un directeur. La droite par A de normal n est donnée par $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $ax + by + c = 0$. Deux droites sont perpendiculaires si leurs normaux sont orthogonaux.

EXEMPLE

$A(1; -2)$, normal $(3; 4)$: $3x + 4y + c = 0$, $3 - 8 + c = 0$, donc $3x + 4y + 5 = 0$.

PIÈGE

$(a; b)$ est normal ; $(-b; a)$ est directeur. Les formules de coordonnées nécessitent un repère orthonormé.

بالعربية 💡 في معلم متعامد ممنظم نحسب الجداء السلمي بضرب الإحداثيات المتناظرة ثم جمعها.

04 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Avec le cosinus

1. $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{A} = 60°$: produit scalaire et BC ?

Produit 6. Al-Kashi : $BC^2 = 16 + 9 - 12 = 13$, $BC = \sqrt{13}$.

Exercice 2 — Dans un carré

1. $ABCD$ carré de côté a : calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Projection de C sur AB : B, donc a^2. Côtés perpendiculaires : 0. Diagonales perpendiculaires : 0. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, donc $-a^2$.

Exercice 3 — Calcul analytique

1. $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (3; 4)$: produit, normes et cosinus de l'angle ?

Produit $6 - 4 = 2$; normes $\sqrt{5}$ et 5 ; $\cos\theta = 2/(5\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}/25$.

Exercice 4 — Orthogonalité

1. Trouver m pour $(m; 2)$ et $(3; -6)$ orthogonaux.

$3m - 12 = 0$, donc $m = 4$.

Exercice 5 — Triangle rectangle

1. $A(1;1)$, $B(4;2)$, $C(0;4)$: montrer rectangle en A et calculer l'aire.

$\overrightarrow{AB} = (3;1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1;3)$: produit 0. $AB = AC = \sqrt{10}$, aire $10/2 = 5$.

Exercice 6 — Équations de droites

1. Droite par $A(1;-2)$ de normal $(3;4)$; droite par $B(0;3)$ perpendiculaire à $2x - y + 1 = 0$.

$3x + 4y + 5 = 0$. Un directeur de D est $(1;2)$, normal de la perpendiculaire : $x + 2y - 6 = 0$.

Exercice 7 — Al-Kashi

1. $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$: angle A et produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

$\cos \widehat{A} = 1/2$, angle $60°$, produit $5 \times 8/2 = 20$.

Exercice 8 — Médiane

1. $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$, I milieu de BC : calculer AI et commenter.

$36 + 64 = 2AI^2 + 50$, donc $AI = 5 = BC/2$. Triangle rectangle en A ; I est le centre du cercle circonscrit.

Exercice 9 — Parallélogramme et losange

1. Montrer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
2. $ABCD$ parallélogramme, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$: exprimer AC et DB, montrer que les diagonales sont perpendiculaires si et seulement si c'est un losange.

Développer et annuler les produits mixtes par symétrie.

$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$. Produit $AB^2 - AD^2$ nul si et seulement si les côtés adjacents sont égaux, donc si le parallélogramme est un losange.

05 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Oublier le signe d'une projection opposée.
- Utiliser la formule analytique hors d'un repère orthonormé.
- Confondre normal et directeur.
- Oublier le double produit dans la norme d'une somme.
- Oublier le facteur 2 dans Al-Kashi.

Français	العربية
Produit scalaire	الجداء السلمي
Projeté orthogonal	المسقط العمودي
Norme	منظم
Orthogonalité	تعامد
Vecteur normal	متجهة منظمية
Perpendiculaires	متعامدان
Théorème d'Al-Kashi	مبرهنة الكاشي
Théorème de la médiane	مبرهنة المتوسط
Losange	معين
Repère orthonormé	معلم متعامد ممنظم

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A