Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

# Les polynômes

الحدوديات

Polynômes au Tronc Commun : degré, coefficients, racines, factorisation, division euclidienne et tableau de Horner, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

**Objectifs de la séance**

- Généralités
- Racine et factorisation
- Le tableau de Horner

بالعربية 💡 الحدودية مجموع حدود من الشكل $ax^n$. إذا كان a جذراً للحدودية فإنها تقبل القسمة على x − a؛ نستعمل المطابقة أو جدول هورنر.

## 01 Généralités

عموميات

**MONÔME ET POLYNÔME**

Un monôme est $ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme est $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Si $a_n \neq 0$, son degré est $n$ ; les $a_k$ sont ses coefficients.

**ÉGALITÉ ET DEGRÉ**

Deux polynômes sont égaux pour tout $x$ si leurs coefficients de chaque puissance sont égaux : identification.

Pour des polynômes non nuls, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ ; si $P + Q \neq 0$, $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P ; \deg Q)$.

**EXEMPLE**

$x^2 + 3x - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$. Le membre droit vaut $ax^2 + (b-2a)x + (a-b+c)$. Donc $a = 1$, $b = 5$, $c = 3$.

بالعربية 💡 تتساوى حدوديتان إذا كانت لهما نفس معاملات كل قوة. هذه الخاصية تسمى المطابقة.

## 02 Racine et factorisation

الجذر والتعميل

**DÉFINITION**

$a$ est racine de $P$ si $P(a) = 0$. Pour un polynôme non nul, cela équivaut à $P(x) = (x - a)Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P - 1$.

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$$

Le quotient $Q$ est unique et le reste de la division par $x - a$ vaut $P(a)$.

**EXEMPLE**

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. $P(1) = 0$, donc $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

**PIÈGE**

Tester 0, 1, −1, 2, −2… Pour un polynôme à coefficients entiers, une racine entière non nulle divise le terme constant. Vérifier toujours $P(a) = 0$.

## 03 Le tableau de Horner

جدول هورنر

**MÉTHODE**

Pour diviser par $x - a$, écrire tous les coefficients, abaisser le premier, multiplier par $a$ puis ajouter au suivant. Les résultats, sauf le dernier, sont les coefficients du quotient ; le dernier vaut $P(a)$.

| | Coefficient de x³ | Coefficient de x² | Coefficient de x | Constant |
|---|---|---|---|---|
| P | 2 | −3 | 4 | −5 |
| × 2 puis + | | 4 | 2 | 12 |
| Résultat | 2 | 1 | 6 | 7 |

$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (x - 2)(2x^2 + x + 6) + 7$.

بالعربية 💡 نضرب في a ونجمع مع المعامل الموالي. آخر عدد هو الباقي P(a).

## 04 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

**Exercice 1 — Degré et coefficients**

1. Développer, réduire et donner le degré de $P(x) = (2x - 1)(x^2 + 3) - 2x^3$ et $Q(x) = (x + 1)^3 - x^3$.

$P(x) = -x^2 + 6x - 3$ et $Q(x) = 3x^2 + 3x + 1$ : degré 2.

### Exercice 2 — Identification

1. Trouver $a, b, c$ tels que $x^2 + 3x - 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ pour tout $x$.

---

Identifier dans $ax^2 + (b-2a)x + (a-b+c)$ : $a = 1, b = 5, c = 3$.

### Exercice 3 — Racine évidente

1. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ : calculer $P(1)$, factoriser, résoudre $P(x) = 0$ puis $P(x) > 0$.

---

$P(1) = 0$. $P(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$. Racines $\{-2; 1; 3\}$. Tableau des trois facteurs : positif sur $]-2; 1[ \cup ]3; +\infty[$.

### Exercice 4 — Horner

1. Diviser $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ par $x - 2$ et $R(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ par $x + 2$. Factoriser $R$.

---

Pour $P$, quotient $2x^2 + x + 6$, reste 7. Pour $R$, prendre $a = -2$ : résultats 1, 2, -3, 0.
$R(x) = (x+2)(x^2 + 2x - 3) = (x+2)(x-1)(x+3)$.

### Exercice 5 — Paramètre

1. $P(x) = x^3 + mx^2 - 4x + 4$. Trouver $m$ pour que $x + 2$ divise $P$, puis factoriser.

---

$P(-2) = 4m + 4 = 0$ donne $m = -1$. $P(x) = (x-1)(x^2 - 4) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

### Exercice 6 — Polynôme bicarré

1. Factoriser $x^4 - 5x^2 + 4$ et résoudre son annulation en posant $X = x^2$.

---

$X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$. Donc $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ ; $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

### Exercice 7 — Trouver un polynôme

1. Trouver $P$ de degré 2 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 6$, puis factoriser.

---

$P = ax^2 + bx + c$ : $c = 1$, $a + b = -1$, $a - b = 5$. $a = 2, b = -3$. $P(x) = 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$.

### Exercice 8 — Racine double

1. $P(x) = x^3 - 3x + 2$ : montrer $P(x) = (x-1)^2(x+2)$, étudier le signe et en déduire $x^3 + 2 \geq 3x$ pour $x \geq -2$.

$P(1) = 0$ ; division : $P = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$. Le facteur carré est positif sauf en 1. $P < 0$ sur $]-\infty;-2[$, nul en -2 et 1, positif sur $]-2;1[\cup]1;+\infty[$. Pour $x \geq -2$, $P \geq 0$.

**Exercice 9 — Équation de degré 3**

1. Résoudre $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ ; chercher une racine parmi -1, 2, 1/2.

$P(-1) = 0$. Horner : 2, -5, 2, 0. $P = (x+1)(2x^2-5x+2) = (x+1)(x-2)(2x-1)$. $S = \{-1; 1/2; 2\}$.

## 05 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

$$P(a) = 0 \iff (x-a) \mid P$$

$$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Diviser par $x+2$ avec $a = 2$ au lieu de -2.
- Oublier un coefficient nul dans Horner.
- Confondre racine et coefficient.
- Arrêter la factorisation trop tôt.
- Ne pas vérifier l'annulation.

| Français | العربية |
|---|---|
| Monôme | حدانية |
| Polynôme | حدودية |
| Degré | درجة |
| Coefficient | معامل |
| Racine | جذر |
| Divisible par | قابل للقسمة على |
| Division euclidienne | القسمة الإقليدية |
| Quotient | خارج |
| Reste | باقي |
| Factoriser | عقل |
| Identification | المطابقة |
| Tableau de Horner | جدول هورنر |

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A