Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Ordre dans R et valeur absolue

الترتيب في R والقيمة المطلقة

Ordre et valeur absolue au Tronc Commun : comparer, encadrer, utiliser les intervalles et résoudre les inéquations, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Comparer deux réels
- Intervalles et encadrements
- Valeur absolue

بالعربية 💡 نتعلم مقارنة عددين حقيقيين والتأطير والمجالات والقيمة المطلقة التي تمثل المسافة بين عددين.

01 Comparer deux réels

مقارنة عددين حقيقيين

$$a \leq b \iff a - b \leq 0$$

ORDRE ET OPÉRATIONS

Ajouter un même nombre conserve l'ordre. Multiplier par $c > 0$ conserve l'ordre ; par $c < 0$ inverse le sens.

$a \leq b, c \leq d$ impliquent $a + c \leq b + d$. Pour $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, $ac \leq bd$.

Pour $0 < a \leq b$, $1/a \geq 1/b$, $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

EXEMPLE

Comparer $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ et 4 : les deux sont positifs. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 8 + 2\sqrt{15} < 16$, car $2\sqrt{15} = \sqrt{60} < 8$. Donc $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 4$.

PIÈGE

On ne soustrait pas ni ne divise membre à membre : $3 \leq 5$ et $1 \leq 4$ n'impliquent pas $3 - 1 \leq 5 - 4$.

بالعربية 💡 لمقارنة عددين ندرس إشارة الفرق. عند الضرب في عدد سالب يتغير اتجاه المتفاوتة.

02 Intervalles et encadrements

المجالات والتأطير

Intervalle	Condition	Type
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	Fermé
$]a;b[$	$a < x < b$	Ouvert
$[a;b[$	$a \leq x < b$	Semi-ouvert
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	Borne incluse
$]-\infty;b[$	$x < b$	Borne exclue
$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$	Tout réel	

ENCADREMENT

Encadrer x : trouver $a \leq x \leq b$. Amplitude $b-a$; a est une valeur approchée par défaut et b par excès à $b-a$ près.

EXEMPLE

$1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$ et $1{,}73 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$ donnent $3{,}14 \leq \sqrt{2}+\sqrt{3} \leq 3{,}16$.

Pour la différence : $-1{,}42 \leq -\sqrt{2} \leq -1{,}41$, donc $0{,}31 \leq \sqrt{3}-\sqrt{2} \leq 0{,}33$.

PIÈGE

Pour encadrer une différence, encadrer l'opposé du second terme, puis ajouter.

03 Valeur absolue

القيمة المطلقة

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$|xy| = |x||y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ (y \neq 0)$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$|x|$ est la distance de x à 0 ; $|a-b|$ est la distance entre a et b.

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS — R › 0

$|x-a|=r \iff x=a-r$ ou $x=a+r$.

$|x-a|\le r \iff a-r\le x\le a+r$.

$|x-a|\ge r \iff x\le a-r$ ou $x\ge a+r$.

$|x|=|y| \iff x=y$ ou $x=-y$.

EXEMPLE

$|2x-3|\le 5 \iff -5\le 2x-3\le 5 \iff -1\le x\le 4$. Solution $[-1;4]$.

بالعربية 💡 القيمة المطلقة $|a-b|$ هي المسافة بين العددين. المتفاوتة $|x-a|\le r$ تعني أن x ينتمي إلى المجال $[a-r;a+r]$.

04 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Comparer

1. Comparer $3/7$ et $5/12$; $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}+2$; x^2 et x pour $0<x<1$.

$3/7-5/12=1/84>0$. Les carrés des deux sommes valent $9+2\sqrt{14}$ et $9+2\sqrt{20}$: la première est plus petite.
$x^2-x=x(x-1)<0$, donc $x^2<x$.

Exercice 2 — Encadrer

1. $2\le x\le 3, -1\le y\le 2$: encadrer $x+y$, $x-y$, $3x-2y$, x^2 et $1/x$.

$1\le x+y\le 5$; $0\le x-y\le 4$; $2\le 3x-2y\le 11$; $4\le x^2\le 9$; $1/3\le 1/x\le 1/2$.

Exercice 3 — Intervalles

1. Écrire : $-2<x\le 5$; $x\ge -1$; $[-3;4]\cap]1;7]$; $[-3;4]\cup]1;7]$; $\mathbb{R}\setminus]0;2]$.

$]-2;5]$; $[-1;+\infty[$; $]1;4]$; $[-3;7]$; $]-\infty;0]\cup]2;+\infty[$.

Exercice 4 — Calculs

1. Calculer $|-7|, |3-\pi|, |\sqrt{2}-1|, |1-\sqrt{3}|$. Écrire sans valeur absolue $A=|x-2|+|x+1|$ pour $x\in[-1;2]$.

$7, \pi-3, \sqrt{2}-1, \sqrt{3}-1$. $x-2\le 0$ et $x+1\ge 0$, donc $A=2-x+x+1=3$.

Exercice 5 — Équations

1. Résoudre $|x-3|=5$; $|2x+1|=4$; $|x+2|=-1$; $|x-1|=|2x+3|$.

$x=-2$ ou 8 ; $x=3/2$ ou $-5/2$; ensemble vide ; $x-1=2x+3$ ou $x-1=-2x-3$, donc $x=-4$ ou $-2/3$.

Exercice 6 — Inéquations

1. Résoudre et représenter $|x-1|\leq 3$; $|2x-3|<5$; $|x+2|\geq 4$.

$[-2;4]$; $]-1;4[$; $]-\infty;-6]\cup[2;+\infty[$.

Exercice 7 — Valeur approchée

1. $1{,}732\leq\sqrt{3}\leq 1{,}733$: donner les valeurs par défaut et par excès à 10^{-3} près.
2. Encadrer $A=2\sqrt{3}-1$ et $B=1/\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.

$1{,}732$ et $1{,}733$. $2{,}464\leq A\leq 2{,}466$.

$1/1{,}733\leq B\leq 1/1{,}732$. Arrondir vers l'extérieur : $0{,}577\leq B\leq 0{,}578$.

Exercice 8 — Distance et intervalle

1. Traduire : la distance entre x et 3 est au plus 2.
2. Écrire $[-1;7]$ sous la forme $|x-a|\leq r$. Montrer que $|x-2|\leq 1$ implique $|x^2-4|\leq 5$.

$|x-3|\leq 2$. Centre 3 et rayon 4 : $|x-3|\leq 4$.

$1\leq x\leq 3$, donc $|x+2|\leq 5$ et $|x^2-4|=|x-2||x+2|\leq 5$.

Exercice 9 — Inégalité classique

1. Montrer $a^2+b^2\geq 2ab$; en déduire $x+1/x\geq 2$ pour $x>0$; puis $(a+b)(1/a+1/b)\geq 4$ pour $a,b>0$.

$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$.

$x+1/x-2=(x-1)^2/x\geq 0$.

$(a+b)(1/a+1/b)=2+a/b+b/a\geq 4$ en appliquant la propriété à $x=a/b$.

05 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

$$a\leq b \iff a-b\leq 0$$

$$|x-a|\leq r \iff x\in[a-r;a+r]$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Oublier de changer le sens avec un multiplicateur négatif.
- Soustraire membre à membre.
- Enlever une valeur absolue sans étudier le signe.
- Accepter une valeur absolue négative.
- Mal fermer les crochets.

Français	العربية
Inférieur ou égal	أصغر من أو يساوي
Supérieur	أكبر
Comparer	قارن
Encadrement	تأطير
Intervalle	مجال
Borne	حد
Valeur absolue	القيمة المطلقة
Distance	مسافة
Valeur approchée	قيمة مقربة
Par défaut / par excès	بتفريط / بإفراط
Amplitude	سعة
Inégalité triangulaire	المتفاوتة المثلثية

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A