Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Géométrie dans l'espace

الهندسة الفضائية

Cours de maths Tronc Commun : solides usuels et volumes, positions relatives, parallélisme, théorème du toit et orthogonalité, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Solides usuels et volumes
- Règles d'incidence et positions relatives
- Parallélisme dans l'espace
- Théorème du toit
- Orthogonalité d'une droite et d'un plan

بالعربية 💡 ندرس الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء، والتوازي والتعامد، ونراجع حجوم المجسمات الاعتيادية.

01 Solides usuels et volumes

المجسمات الاعتيادية والحجوم

Solide	Volume	Aire
Cube d'arête a	a^3	$6a^2$
Pavé droit $a \times b \times c$	abc	$2(ab+bc+ca)$
Prisme droit, cylindre	$B \times h$	latérale : périmètre de base $\times h$
Pyramide, cône	$\frac{1}{3}Bh$	–
Cylindre de rayon r	$\pi r^2 h$	latérale : $2\pi rh$
Sphère / boule de rayon r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$

بالعربية 💡 حجم الهرم أو المخروط يساوي ثلث جداء مساحة القاعدة في الارتفاع: $V = \frac{1}{3}Bh$.

02 Règles d'incidence et positions relatives

قواعد الوقوع والأوضاع النسبية

RÈGLES D'INCIDENCE

Par deux points distincts passe une seule droite ; par trois points non alignés passe un seul plan.

Un plan est aussi déterminé par une droite et un point extérieur, par deux droites sécantes ou par deux droites strictement parallèles.

Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, toute la droite est contenue dans ce plan.

Si deux plans distincts ont un point commun, leur intersection est une droite.

POSITIONS RELATIVES

Deux droites : coplanaires (sécantes ou parallèles) ou non coplanaires.

Une droite et un plan : la droite est contenue dans le plan, sécante au plan (un seul point commun) ou strictement parallèle.

Deux plans : parallèles (confondus ou sans point commun) ou sécants suivant une droite.

EXEMPLE (CUBE ABCDEFGH)

$(AB) \parallel (DC) \parallel (HG)$: parallèles. (AB) et (CG) ne sont pas dans un même plan et ne se coupent pas : non coplanaires.

PIÈGE

Deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles dans l'espace : elles peuvent être non coplanaires.

بالعربية 💡 مستقيمان لا يتقاطعان في الفضاء ليسا بالضرورة متوازيين: قد يكونان غير مستويين.

03 Parallélisme

التوازي

PROPRIÉTÉS

Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Deux plans sont parallèles si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

Théorème du toit : si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites.

بالعربية 💡 مبرهنة السقف: إذا احتوى مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين، فإن مستقيم تقاطعهما يوازي هذين المستقيمين.

04 Orthogonalité

التعامد

DÉFINITIONS

Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires (elles peuvent ne pas se couper).

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan ; elle est alors orthogonale à toutes les droites du plan.

EXEMPLE

Dans le cube, $ABFE$ et $ADHE$ sont des carrés : $(AE) \perp (AB)$ et $(AE) \perp (AD)$, deux droites sécantes du plan (ABC). Donc $(AE) \perp (ABC)$, et par exemple $(AE) \perp (BD)$.

بالعربية 💡 يكون المستقيم عمودياً على مستوى إذا كان عمودياً على مستقيمين متقاطعين ضمن هذا المستوى.

05 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Exercice 1 — Positions de deux droites

Dans le cube $ABCDEFGH$, préciser la position relative des droites :

1. (AB) et (HG).
2. (AB) et (CG).
3. (AE) et (BC).
4. (AC) et (BD).
5. (EG) et (AC).

Parallèles : $(AB) \parallel (DC) \parallel (HG)$.

Non coplanaires.

Non coplanaires.

Sécantes au centre du carré $ABCD$.

Parallèles : $ACGE$ est un rectangle.

Exercice 2 — Droite et plan

Dans le cube, préciser la position de :

1. (EF) et le plan (ABC).
2. (AG) et (ABC).
3. (FG) et le plan (ADH).
4. (BD) et (ABC).

$(EF) \parallel (AB) \subset (ABC)$: parallèle au plan.

(AG) coupe (ABC) en A seulement : sécante.

$(FG) \parallel (BC) \parallel (AD) \subset (ADH)$: parallèle.

(BD) est contenue dans (ABC).

Exercice 3 — Deux plans

Dans le cube, préciser la position de :

1. (ABC) et (EFG).
2. (ABF) et (BCG).

3. (ADH) et (BCG).

Parallèles (faces opposées).

Sécants suivant la droite (BF).

Parallèles (faces opposées).

Exercice 4 — Intersection de deux plans

Dans le cube, O et O' sont les centres des faces $ABCD$ et $EFGH$.

1. Déterminer l'intersection des plans (ACG) et (BDH).

O est sur (AC) et sur (BD), donc dans les deux plans ; de même O' (sur (EG) et (FH)). Les plans sont distincts : leur intersection est la droite (OO').

Exercice 5 — Orthogonalité

Dans le cube $ABCDEFGH$:

1. Montrer que $(AE) \perp (ABC)$.
2. Montrer que $(BD) \perp (ACG)$.
3. En déduire que $(BD) \perp (AG)$.

$(AE) \perp (AB)$ et $(AE) \perp (AD)$, deux droites sécantes du plan (ABC) : voir le cours.

$(BD) \perp (AC)$ (diagonales du carré) et $(BD) \perp (CG)$ car $(CG) \parallel (AE)$, orthogonale au plan (ABC) qui contient (BD). (AC) et (CG) sont sécantes dans (ACG) : $(BD) \perp (ACG)$.

$(AG) \subset (ACG)$, donc $(BD) \perp (AG)$.

Exercice 6 — Volumes dans le cube

Le cube a une arête de 6 cm.

1. Calculer son volume.
2. Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$. Quelle fraction du cube représente-t-il ?

$V = 6^3 = 216$ cm^3.

Base ABD d'aire $\dfrac{6 \times 6}{2} = 18$ cm^2, hauteur $AE = 6$: $V = \dfrac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36$ cm^3, soit $\dfrac{1}{6}$ du cube.

Exercice 7 — Cône et sphère

1. Un cône a un rayon de base de 3 cm et une hauteur de 4 cm. Calculer son volume et la longueur de sa génératrice.
2. Calculer le volume et l'aire d'une sphère de rayon 3 cm.

$V = \dfrac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi \approx 37{,}7$ cm^3 ; génératrice $\sqrt{9+16} = 5$ cm.

$V = \dfrac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi \approx 113{,}1$ cm^3 ; $A = 4\pi \times 9 = 36\pi \approx 113{,}1$ cm^2.

Exercice 8 — Pyramide régulière

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ de côté 4 cm, de sommet S, avec $SA = 6$ cm. O est le centre de $ABCD$.

1. Calculer AO, la hauteur SO et le volume.

$AC = 4\sqrt{2}$, donc $AO = 2\sqrt{2}$ cm.

Le triangle SOA est rectangle en O : $SO = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm.

$V = \dfrac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{7} = \dfrac{32\sqrt{7}}{3} \approx 28{,}2\ \text{cm}^3$.

Exercice 9 — Théorème du toit

$ABCD$ est un tétraèdre, I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

1. Montrer que $(IJ) \parallel (BC)$ et que (IJ) est parallèle au plan (BCD).
2. Déterminer l'intersection des plans (IJD) et (BCD).

Droite des milieux dans le triangle ABC : $(IJ) \parallel (BC)$; comme $(BC) \subset (BCD)$, $(IJ) \parallel (BCD)$.

Les deux plans contiennent D et contiennent respectivement (IJ) et (BC), parallèles. Par le théorème du toit, leur intersection est la droite passant par D et parallèle à (BC).

06 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

Je dois…	Outil / formule
Calculer un volume	Pyramide/cône : $\frac{1}{3}Bh$; prisme/cylindre : Bh
Prouver qu'une droite est parallèle à un plan	Parallèle à une droite du plan
Trouver l'intersection de deux plans	Chercher deux points communs
Utiliser deux droites parallèles	Théorème du toit
Prouver une orthogonalité droite-plan	Orthogonale à deux droites sécantes du plan

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{Bh}{3}$$

$$V_{\text{boule}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A_{\text{sphère}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{cylindre}} = \pi r^2 h$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Croire que deux droites sans point commun sont parallèles.
- Oublier le $\frac{1}{3}$ pour une pyramide ou un cône.
- Vérifier l'orthogonalité avec deux droites parallèles du plan.
- Confondre rayon et diamètre.
- Mal lire une figure en perspective.

Lexique français — arabe · معجم المصطلحات

Français	العربية
Espace	الفضاء
Plan	مستوى
Droites coplanaires	مستقيمات مستوائية
Non coplanaires	غير مستوائية
Sécant	متقاطع
Parallèle	مواز
Orthogonal	عمودي
Théorème du toit	مبرهنة السقف
Cube	مكعب
Pyramide	هرم
Cône	مخروط
Sphère, boule	فلكة، كرة

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A