Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Généralités sur les fonctions

عموميات حول الدوال

Fonctions au Tronc Commun : domaine, images, antécédents, parité, variations, paraboles et hyperboles, avec graphiques et 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Définitions
- Parité
- Variations et extremums
- Fonctions de référence

بالعربية 💡 نتعرف على مجموعة التعريف والصور والسوابق والزوجية والرتابة والمطاريف والدوال المرجعية.

01 Définitions

تعاريف

FONCTION

Une fonction associe à chaque $x \in D_f$ un unique réel $f(x)$, son image. Si $f(a) = b$, a est un antécédent de b. La courbe est l'ensemble des points $(x; f(x))$.

- Un dénominateur doit être non nul.
- Sous une racine carrée, l'expression doit être positive ou nulle.

EXEMPLE

$h(x) = \sqrt{x+2}/(x-1)$: $x \geq -2$ et $x \neq 1$, donc $D_h = [-2; 1[\cup]1; +\infty[$.

PIÈGE

Un nombre peut avoir plusieurs antécédents ou aucun, mais un x du domaine a une seule image.

02 Parité

الزوجية

PAIRE ET IMPAIRE

Vérifier d'abord que D_f est symétrique autour de 0. Paire : $f(-x) = f(x)$, symétrie d'axe des ordonnées. Impaire : $f(-x) = -f(x)$, symétrie de centre O.

x^2 et $|x|$ sont paires ; x^3 et $1/x$ sont impaires. $x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire : images de 1 et −1 différentes sans être opposées.

بالعربية 💡 الدالة الزوجية منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب، والدالة الفردية بالنسبة لأصل المعلم.

03 Variations et extremums

الرتابة والمطاريف

SENS DE VARIATION

Croissante sur I : pour tous $a < b$, $f(a) \leq f(b)$. Décroissante : $f(a) \geq f(b)$. Inégalités strictes pour la stricte monotonie.

$$T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \quad (a \neq b)$$

Si tous les taux sont positifs, strictement croissante ; négatifs, strictement décroissante.

EXTREMUMS

$f(a)$ est maximum sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$, minimum si $f(x) \geq f(a)$.

EXEMPLE

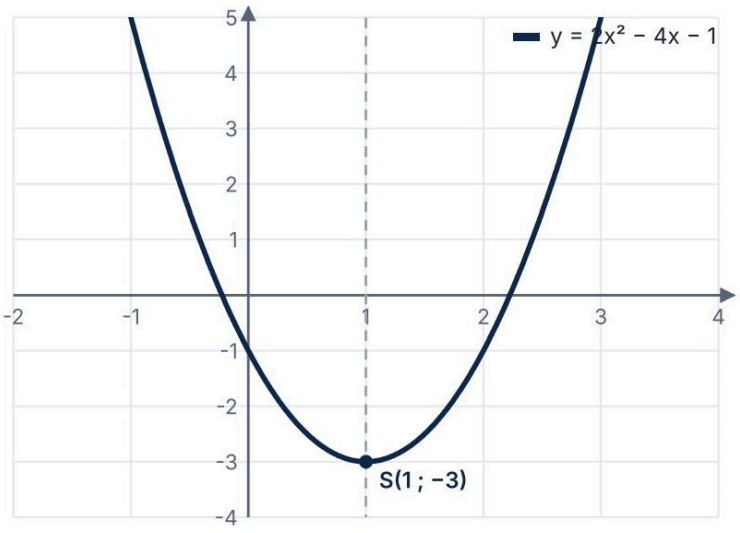
Pour $f(x) = x^2$, $T = a + b$. Négatif sur $]-\infty; 0]$, positif sur $[0; +\infty[$; minimum 0 en 0.

04 Fonctions de référence

الدوال المرجعية

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha)$$

Pour $a \neq 0$, parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$ et axe $x = \alpha$. Si $a > 0$, décroît puis croît, minimum β ; si $a < 0$, croît puis décroît, maximum β.

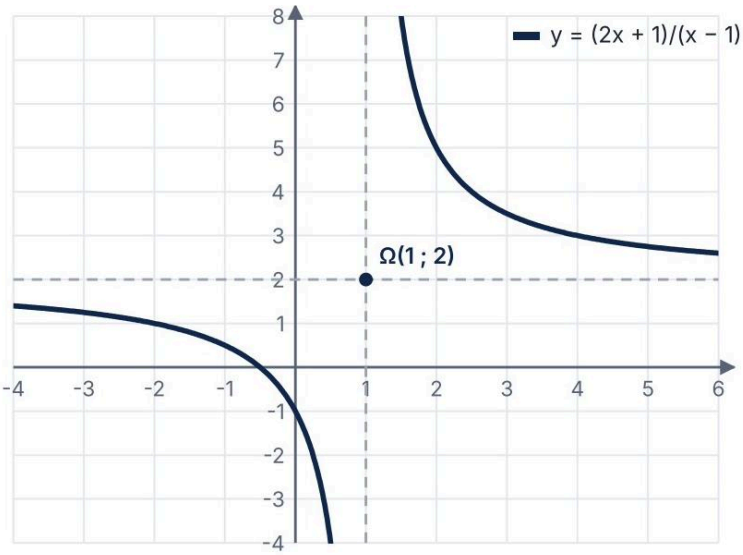


Parabole y = 2x² − 4x − 1, sommet S(1 ; −3).

Pour $a \neq 0$, a/x est une hyperbole de centre O, impaire. Si $a > 0$, décroissante sur chaque intervalle $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$; si $a < 0$, croissante sur chacun.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha} \quad (c \neq 0), \quad \alpha = -\frac{d}{c}, \quad \beta = \frac{a}{c}, \quad k = \frac{bc-ad}{c^2}$$

Pour $k \neq 0$, hyperbole de centre $\Omega(\alpha;\beta)$. Si $k = 0$, fonction constante sur son domaine, pas une hyperbole.



Hyperbole y = (2x + 1)/(x − 1), centre Ω(1 ; 2).

بالعربية 💡 منحنى الدالة التربيعية شلجم، ومنحنى الدالة المتخاطة غير الثابتة هذلول.

05 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Ensembles de définition

1. $f(x) = (x+1)/(x^2-4)$; $g(x) = \sqrt{3-x}$; $h(x) = \sqrt{x+2}/(x-1)$; $k(x) = 1/(|x|-1)$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $D_g =]-\infty; 3]$; $D_h = [-2; 1[\cup]1; +\infty[$; $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Exercice 2 — Images et antécédents

1. $f(x) = x^2 - 2x$: calculer $f(3)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$; antécédents de 3, -1 et -2 ?

3, 3, $2 - 2\sqrt{2}$. $f = 3$ donne $(x-3)(x+1) = 0$, antécédents 3 et -1. $f = -1$ donne $(x-1)^2 = 0$, antécédent 1. $f = (x-1)^2 - 1 \geq -1$, donc aucun antécédent de -2.

Exercice 3 — Parité

1. Étudier $x^3 - x$, $x^2 + |x|$, $(x^2+1)/x$, $x^2 + x$ et $\sqrt{x}$.

Impaire ; paire ; impaire sur $\mathbb{R}^*$; ni paire ni impaire ; ni paire ni impaire car domaine $[0; +\infty[$ non symétrique.

Exercice 4 — Variations par le taux

1. Étudier $f(x) = -2x + 3$ sur R et $g(x) = 3/x$ sur chacun des intervalles de son domaine.

$T_f = -2 < 0$, strictement décroissante. $T_g = -3/(ab)$: sur chacun de $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, $ab > 0$, donc décroissante. Pas décroissante sur tout $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5 — Une parabole

1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$: forme canonique, sommet, axe, variations et $f(x) = -1$.

$f = 2(x-1)^2 - 3$. Sommet $(1; -3)$, axe $x = 1$; décroissante jusqu'à 1 puis croissante. Minimum -3. $f = -1$ donne $2x(x-2) = 0$: 0 ou 2.

Exercice 6 — Une hyperbole

1. $g(x) = (2x+1)/(x-1)$: domaine, vérifier $g = 2 + 3/(x-1)$, centre, variations et intersections avec les axes.

Domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. $2(x-1) + 3 = 2x + 1$. Centre $(1; 2)$; décroissante sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$. Intersections $(-1/2; 0)$ et $(0; -1)$.

Exercice 7 — Tableau de variations

1. f définie sur $[-3; 5]$, croissante de $f(-3) = 1$ à $f(0) = 4$, décroissante jusqu'à $f(3) = -2$, puis croissante jusqu'à $f(5) = 0$. Dresser le tableau et donner maximum et minimum.
2. Les seules variations permettent-elles de connaître le nombre exact de solutions de $f(x) = 0$? Comparer $f(1)$ et $f(2)$.

Tableau : 1 ↗ 4 ↘ −2 ↗ 0. Maximum 4 en 0, minimum −2 en 3.

Non : sans continuité ni stricte monotonie, le nombre exact n'est pas garanti. Si f est continue et strictement monotone sur les trois intervalles, il y a une racine dans]0 ; 3[et la racine 5, soit deux. Dans tous les cas $f(1) \geq f(2)$.

Exercice 8 — Parabole et droite

1. Résoudre $x^2 = 2x + 3$ puis $x^2 \leq 2x + 3$ algébriquement et graphiquement.

$(x-3)(x+1) = 0$: −1 et 3. Parabole sous la droite entre les intersections : $[-1; 3]$.

Exercice 9 — Fonction bornée

1. $f(x) = x/(x^2+1)$: domaine, parité, montrer $-1/2 \leq f(x) \leq 1/2$ et préciser les extremums.

$x^2 + 1 > 0$, domaine R ; $f(-x) = -f(x)$: impaire. $1/2 - f(x) = (x-1)^2/[2(x^2+1)] \geq 0$. Par imparité, borne inférieure −1/2. Maximum 1/2 en 1 ; minimum −1/2 en −1.

06 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

$$T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha)$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Oublier la symétrie du domaine pour la parité.
- Dire que 1/x décroît sur tout R*.
- Confondre image et antécédent.
- Oublier les valeurs interdites.
- Se tromper de signe pour le sommet.

Français	العربية
Fonction	دالة
Ensemble de définition	مجموعة التعريف
Image	صورة
Antécédent	سابق
Paire / impaire	زوجية / فردية
Croissante / décroissante	تزايدية / تناقصية
Taux de variation	معدل التغير
Maximum / minimum	قيمة قصوى / دنيا
Parabole	شلجم
Hyperbole	هذلول
Sommet	رأس
Centre de symétrie	مركز التماثل

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A