Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Équations, inéquations et systèmes

المعادلات والمتراجحات والنظمات

Équations et inéquations au Tronc Commun : premier et second degré, signes, discriminant, systèmes et régionnement, avec 10 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Premier degré et signe de ax + b
- Second degré
- Systèmes et régionnement

بالعربية 💡 نتعلم حل المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى والثانية باستعمال المميز وإشارة ثلاثية الحدود وحل النظمات بمجهولين.

01 Premier degré et signe de ax + b

الدرجة الأولى

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

SIGNE

$ax + b$ est du signe de a à droite de $-b/a$, et du signe contraire à gauche.

x	$]-\infty;2[$	2	$]2;3[$	3	$]3;+\infty[$
2x − 4	−	0	+	+	+
3 − x	+	+	+	0	−
Produit	−	0	+	0	−

$(2x-4)(3-x) \geq 0$ donne $[2;3]$.

⚠ PIÈGE

Les zéros du dénominateur sont toujours exclus d'une inéquation quotient.

بالعربية 💡 إشارة ax + b هي إشارة a على يمين الجذر وعكس إشارة a على يساره.

02 Second degré

الدرجة الثانية

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0), \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Cas	Solutions réelles	Factorisation
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	$a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	Aucune	Pas de facteurs réels du premier degré

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Deux nombres de somme S et produit P sont racines de $X^2 - SX + P = 0$.

SIGNE DU TRINÔME

Du signe de a, sauf entre les racines si $\Delta > 0$. Si $\Delta < 0$, toujours du signe de a. Si $\Delta = 0$, même signe sauf au zéro.

EXEMPLE

$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$: $\Delta = 9$, racines $1/2$ et 2, $a > 0$. $S =]-\infty; 1/2] \cup [2; +\infty[$.

بالعربية 💡 المميز يحدد عدد الحلول. ثلاثية الحدود لها إشارة a إلا بين الجذرين.

03 Systèmes et régionnement

النظمات وتمثيل المتراجحات

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad d = ab' - a'b$$

$$x = \frac{cb' - c'b}{d}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{d} \quad (d \neq 0)$$

Si le déterminant est nul : aucune ou une infinité de solutions. On peut aussi utiliser substitution ou combinaison linéaire.

EXEMPLE

$3x - 2y = 4, 5x + y = 11 : d = 13, x = 26/13 = 2, y = 13/13 = 1$.

INÉQUATION À DEUX INCONNUES

La droite $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans. Tester un point hors de la droite pour choisir le bon côté. Pour un système, prendre l'intersection des régions ; inclure les frontières pour $\leq$ ou $\geq$.

بالعربية 💡 لحل نظمة نستعمل المحددة أو التعويض أو التأليفة الخطية. لتمثيل متراجحة بمجهولين نرسم المستقيم ونختبر نقطة.

04 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Équations simples

1. Résoudre $3x - 5 = 2x + 1$; $(2x - 1)(x + 3) = 0$; $(x - 2)/(x + 1) = 0$; $x^2 = 5x$; $(x + 1)^2 = 9$.

$x = 6$; $x = 1/2$ ou −3 ; $x = 2$ (différent de −1) ; $x(x - 5) = 0$ donne 0 ou 5 ; $x + 1 = \pm 3$ donne 2 ou −4.

Exercice 2 — Inéquations

1. Résoudre $-2x + 6 > 0$; $(2x - 4)(3 - x) \geq 0$; $(x + 1)/(x - 2) < 0$; $x/(x - 1) \geq 2$.

$x < 3$; $[2; 3]$; $]-1; 2[$; $(2 - x)/(x - 1) \geq 0$ donne $]1; 2]$.

Exercice 3 — Second degré

1. Résoudre $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$; $-x^2 + 2x + 3 = 0$.

Discriminants 9, 0, −3, 16. Solutions respectives : $\{1/2; 2\}$; $\{2\}$; $\varnothing$; $\{-1; 3\}$.

Exercice 4 — Signe

1. Factoriser et étudier $P(x) = -x^2 + 2x + 3$, $Q(x) = x^2 + x + 1$. Résoudre $P > 0$ et $Q \leq 0$.

$P = -(x+1)(x-3)$, positif entre −1 et 3 et négatif à l'extérieur. $P > 0$ sur $]-1;3[$. Q a un discriminant négatif et un coefficient dominant positif : $Q > 0$ partout, donc $Q \leq 0$ sans solution.

Exercice 5 — Somme et produit

1. Trouver deux nombres de somme 7 et produit 10.
2. α, β racines de $x^2 - 3x - 1 = 0$: calculer leur somme, produit, $\alpha^2 + \beta^2$ et $1/\alpha + 1/\beta$.

$X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$: 2 et 5.

Somme 3, produit −1 ; somme des carrés $3^2 - 2(-1) = 11$; somme des inverses $3/(-1) = -3$.

Exercice 6 — Se ramener au second degré

1. Résoudre $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ et $(x+1)/(x-1) = 2x$.

$X = x^2$ donne $X = 4$ ou 9 : $S = \{-3; -2; 2; 3\}$.

$x \neq 1$: $2x^2 - 3x - 1 = 0$, $\Delta = 17$, $x = (3 \pm \sqrt{17})/4$; aucune solution n'est 1.

Exercice 7 — Systèmes

1. Résoudre $2x + 3y = 7, x - y = 1$ par substitution ; $3x - 2y = 4, 5x + y = 11$ par déterminant ; $2x - y = 3, -4x + 2y = 1$.

Premier : $x = 1 + y$ donne $y = 1$, $x = 2$. Deuxième : déterminant 13, solution $(2; 1)$. Troisième : multiplier la première par −2 donnerait $-4x + 2y = -6$, contradiction : aucune solution.

Exercice 8 — Rectangle

1. Un rectangle a un périmètre de 34 m et une aire de 60 m². Calculer ses dimensions.

$L + \ell = 17$, $L\ell = 60$. Racines de $X^2 - 17X + 60 = 0$, discriminant 49 : 12 m et 5 m.

Exercice 9 — Régionnement

1. Représenter $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq x$. Tester $A(1;2)$ et $B(3;2)$.

Tracer $x + y = 4$, $x = 0$, $y = x$; garder $x \geq 0$, au-dessus de $y = x$ et sous $y = 4 - x$. Triangle fermé de sommets $(0;0)$, $(0;4)$, $(2;2)$. A satisfait les trois inégalités ; B viole $x + y \leq 4$.

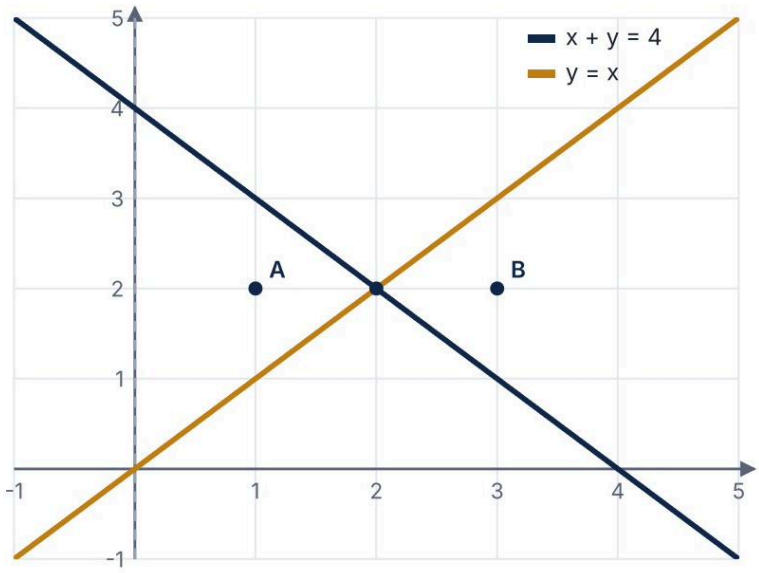
Exercice 10 — Paramètre

1. Discuter le nombre de solutions de $x^2 - 2x + m = 0$. Pour quel m la solution 3 existe-t-elle ? Quelle autre solution ?

$\Delta = 4 - 4m$: deux solutions si $m < 1$, une (1) si $m = 1$, aucune si $m > 1$. $9 - 6 + m = 0$ donne $m = -3$. La somme vaut 2, donc l'autre racine est −1.

05 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات



Exercice 9 : frontières x + y = 4 et y = x ; ajouter x = 0 pour délimiter la région.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Diviser par une expression pouvant être nulle.
- Oublier les valeurs interdites.
- Mal appliquer le signe quand a est négatif.
- Se tromper dans le signe de la racine double.
- Conclure sans vérifier lorsque le déterminant est nul.

Français	العربية
Équation	معادلة
Inéquation	متراجحة
Inconnue	مجهول
Solution	حل
Tableau de signes	جدول الإشارات
Trinôme	ثلاثية الحدود
Discriminant	المميز
Racine double	جذر مزدوج
Forme canonique	الشكل النموذجي
Système	نظمة
Déterminant	المحددة
Demi-plan	نصف مستوى

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A