Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Les ensembles de nombres N, Z, D, Q et R

مجموعات الأعداد

Cours de maths Tronc Commun : ensembles N, Z, D, Q, R, puissances, identités remarquables et racines carrées, avec 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Les cinq ensembles de nombres
- Un nombre irrationnel : √2
- Puissances
- Identités remarquables
- Racines carrées

بالعربية 💡 نتعرف على مجموعات الأعداد ونراجع قواعد القوى والمتطابقات الهامة والجذور المربعة.

01 Les cinq ensembles de nombres

مجموعات الأعداد الخمس

DÉFINITION — LES ENSEMBLES

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$: entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$: entiers relatifs.

$\mathbb{D}$: nombres décimaux, de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$; exemple : $-3{,}25 = \frac{-325}{10^2}$.

$\mathbb{Q}$: rationnels, de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

$\mathbb{R}$: réels, abscisses des points d'une droite graduée. Un réel non rationnel est irrationnel, comme $\sqrt{2}$ et π.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

RECONNAÎTRE UN DÉCIMAL

Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est décimale si et seulement si son dénominateur est $2^m 5^n$: aucun autre facteur premier.

EXEMPLES

$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = 0{,}175 \in \mathbb{D}$. $\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{5}{6} \notin \mathbb{D}$, car $6 = 2 \times 3$.

PIÈGE

Simplifie d'abord : $\frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ est décimal malgré le facteur 7 de 35.

بالعربية 💡 الأعداد الصحيحة الطبيعية، النسبية، العشرية، الجذرية والحقيقية. العدد الحقيقي غير الجذري يسمى عدداً لا جذرياً.

02 Un nombre irrationnel : √2

عدد لا جذري

PROPRIÉTÉ

Si p^2 est pair, p est pair : le carré d'un impair est impair.

DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec une fraction irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc $p = 2k$. Ainsi $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q est pair aussi. La fraction est réductible, contradiction. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{n}$ lorsque n n'est pas un carré parfait sont irrationnels. Une écriture décimale illimitée périodique est rationnelle : $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$.

بالعربية 💡 نبرهن بالخلف: نفترض أن الجذر يكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال، ثم نصل إلى تناقض.

03 Puissances

القوى

DÉFINITION

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, a^n est le produit de n facteurs égaux à a. Pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ces règles s'utilisent pour $a, b \neq 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$. Écriture scientifique : $a \times 10^n$, $1 \leq |a| < 10$. Exemple : $0{,}000345 = 3{,}45 \times 10^{-4}$.

EXEMPLE

$B = \dfrac{(3^2 \times 5)^3}{15^4} = \dfrac{3^6 \times 5^3}{3^4 \times 5^4} = \dfrac{9}{5}$.

PIÈGE

$(-2)^4 = 16$ mais $-2^4 = -16$. $2^3 + 2^3 = 2^4$, pas 2^6.

04 Identités remarquables

المتطابقات الهامة

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

EXEMPLES

$9x^2 - 25 = (3x-5)(3x+5)$; $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.

بالعربية 💡 المتطابقات الهامة تمكن من النشر والتعميل بسرعة.

05 Racines carrées

الجذور المربعة

DÉFINITION

Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut a.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

EXEMPLES

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

PIÈGES

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général : $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7$.
- $\sqrt{(-3)^2} = 3$, pas -3.

بالعربية 💡 نستعمل المرافق لحذف الجذر من المقام.

06 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Appartenance à un ensemble

1. Compléter par $\in$ ou $\notin$: $-3 \ldots \mathbb{N}$; $\dfrac{-12}{3} \ldots \mathbb{Z}$; $\dfrac{7}{4} \ldots \mathbb{D}$; $\dfrac{2}{3} \ldots \mathbb{D}$; $\sqrt{16} \ldots \mathbb{N}$; $\sqrt{5} \ldots \mathbb{Q}$; $\pi \ldots \mathbb{R}$; $0{,}25 \ldots \mathbb{Q}$.

$-3 \notin \mathbb{N}$; $-12/3 = -4 \in \mathbb{Z}$; $7/4 = 1{,}75 \in \mathbb{D}$; $2/3 \notin \mathbb{D}$ (mais $2/3 \in \mathbb{Q}$) ; $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \in \mathbb{R}$; $0{,}25 = 1/4 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2 — Décimal ou non ?

1. Quels nombres sont décimaux : $7/40$, $3/12$, $5/6$, $21/35$, $14/45$, $9/75$?

$7/40 = 0{,}175$, $3/12 = 1/4$, $21/35 = 3/5$ et $9/75 = 3/25 = 0{,}12$ sont décimaux. $5/6$ et $14/45$ ne le sont pas : leur dénominateur irréductible contient 3.

Exercice 3 — Puissances

1. Simplifier $A = \dfrac{(2^3)^2 \times 2^{-4}}{2^2}$, $B = \dfrac{(3^2 \times 5)^3}{15^4}$ et $C = \dfrac{10^{-3} \times (0{,}1)^2}{10^{-6}}$.
2. Donner l'écriture scientifique de $0{,}000345$ et $72\,300\,000$.

$A = 2^{6-4-2} = 1$; $B = 9/5$; $C = 10^{-3-2+6} = 10$.

$3{,}45 \times 10^{-4}$ et $7{,}23 \times 10^{7}$.

Exercice 4 — Développer et factoriser

1. Développer $(2x-3)^2$, $(x+2)(x-2)$ et $(x+1)^3$.
2. Factoriser $9x^2 - 25$, $x^2 - 6x + 9$, $x^3 - 8$ et $(x+1)^2 - 4$.

$4x^2 - 12x + 9$; $x^2 - 4$; $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

$(3x-5)(3x+5)$; $(x-3)^2$; $(x-2)(x^2+2x+4)$; $(x-1)(x+3)$.

Exercice 5 — Racines carrées

1. Simplifier $\sqrt{50}$, $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$ et $(2\sqrt{3})^2$.
2. Rationaliser $1/(\sqrt{3}-1)$ et $2/(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.
3. Calculer $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ et l'inverse de $\sqrt{5}+2$.

$5\sqrt{2}$; $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0$; 12.

$(\sqrt{3}+1)/2$; $2(\sqrt{5}-\sqrt{3})/(5-3) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Le produit vaut 1, donc l'inverse est $\sqrt{5} - 2$.

Exercice 6 — Écriture décimale périodique

1. Écrire en fractions irréductibles $x = 0{,}333\ldots$ et $y = 0{,}1212\ldots$. Conclure.

$10x - x = 3$, donc $x = 1/3$. $100y - y = 12$, donc $y = 12/99 = 4/33$. Une écriture illimitée périodique est rationnelle.

Exercice 7 — Une racine double

1. Calculer $(2+\sqrt{3})^2$ et $(2-\sqrt{3})^2$.
2. Simplifier $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ et $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, puis leur différence.

$7+4\sqrt{3}$ et $7-4\sqrt{3}$.

Comme $2 \pm \sqrt{3} > 0$, les racines valent $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Leur différence vaut $2\sqrt{3}$.

Exercice 8 — Une somme télescopique

1. Montrer $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ pour $n \geq 1$.
2. Calculer $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

Multiplier par le conjugué : le dénominateur devient $(n+1)-n = 1$.

Les termes intermédiaires s'annulent : $S = \sqrt{100} - 1 = 9$.

Exercice 9 — √3 est irrationnel

1. Si p n'est pas multiple de 3, montrer que p^2 ne l'est pas (écrire $p = 3k+1$ ou $p = 3k+2$).
2. En déduire par l'absurde $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

$(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$; $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$. Le reste est 1.

Si $\sqrt{3} = p/q$ irréductible, $p^2 = 3q^2$, donc $p = 3k$. Puis $q^2 = 3k^2$, donc q est multiple de 3 aussi : contradiction.

07 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

Je dois…	Outil / méthode
Reconnaître un décimal	Simplifier, puis dénominateur 2 et 5 seulement
Prouver une irrationalité	Raisonnement par l'absurde
Simplifier des puissances	Regrouper les bases et les exposants
Factoriser	Facteur commun ou identité remarquable
Rationaliser	Expression conjuguée

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Conclure sans simplifier une fraction.
- Confondre signe et parenthèses dans une puissance.
- Distribuer une racine sur une somme.
- Oublier la valeur absolue de la racine d'un carré.
- Oublier le double produit.

Français	العربية
Entier naturel	عدد صحيح طبيعي
Entier relatif	عدد صحيح نسبي
Nombre décimal	عدد عشري
Nombre rationnel	عدد جذري
Nombre réel	عدد حقيقي
Nombre irrationnel	عدد لا جذري
Puissance / exposant	قوة / أس
Identité remarquable	متطابقة هامة
Développer / factoriser	نشر / تعميل
Racine carrée	جذر مربع
Expression conjuguée	المرافق
Fraction irréductible	كسر غير قابل للاختزال

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A