Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Calcul vectoriel dans le plan

الحساب المتجهي في المستوى

Cours de maths Tronc Commun : vecteurs, relation de Chasles, produit d'un vecteur par un réel, colinéarité, alignement, parallélisme et milieu d'un segment, avec 2 exercices corrigés et lexique français-arabe.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Reconnaître et construire des vecteurs égaux, et faire le lien avec le parallélogramme.
- Utiliser la relation de Chasles pour simplifier une somme de vecteurs.
- Construire le vecteur $k\,\vec{u}$ et utiliser ses propriétés.
- Démontrer l'alignement de points ou le parallélisme de droites avec la colinéarité.

بالعربية 💡 المتجهة هي «سهم» يعبّر عن انتقال من نقطة إلى أخرى. في هذا الدرس نتعلم كيف نجمع المتجهات، وكيف نستخدمها لبرهنة استقامة النقاط وتوازي المستقيمات بدون حساب الزوايا.

01 Notion de vecteur et égalité de deux vecteurs

المتجهة وتساوي متجهين

DÉFINITION — VECTEUR

Soient A et B deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

$$\text{direction : celle de } (AB) \qquad \text{sens : de A vers B} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

A est l'origine et B l'extrémité du vecteur.

VECTEURS PARTICULIERS

Le vecteur nul : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$. Il n'a ni direction ni sens, et sa norme est 0.

L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$: même direction, même norme, sens contraire. On écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

بالعربية 💡 كل متجهة $\overrightarrow{AB}$ تتميز بثلاثة عناصر: الاتجاه (اتجاه المستقيم (AB))، المنحى (من A نحو B)، والمنظم (الطول AB). $\overrightarrow{BA}$ هي مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

(éventuellement aplati, si A, B, C, D sont alignés). Attention à l'ordre des lettres : A, B, D, C.

PIÈGE

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne le parallélogramme ABDC, pas ABCD. Pour avoir ABCD, il faut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Le plus simple est de faire un petit schéma.

LIEN AVEC LA TRANSLATION

Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est dire que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: on « glisse » C de la même façon que A glisse vers B.

02 Somme de deux vecteurs et relation de Chasles

مجموع متجهين وعلاقة شال

RELATION DE CHASLES

Pour tous points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

L'extrémité du premier vecteur est l'origine du second : on « passe par B ».

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

Quand les deux vecteurs ont la même origine A :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

$\overrightarrow{AD}$ est la diagonale issue de A.

PROPRIÉTÉS DE LA SOMME

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \text{(commutativité)}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \quad \text{(associativité)}$$

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \qquad ; \qquad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

Différence : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. Par exemple $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

بالعربية 💡 علاقة شال: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. نهاية المتجهة الأولى هي بداية المتجهة الثانية، فنمر عبر النقطة B. إذا كان للمتجهتين نفس الأصل نستعمل قاعدة متوازي الأضلاع.

EXEMPLE — SIMPLIFIER AVEC CHASLES

Simplifier $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

$$\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$$

PIÈGE

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ne se simplifie pas directement : Chasles ne marche que si l'extrémité de l'un est l'origine de l'autre. Et en général $AB+BC\neq AC$ pour les longueurs : Chasles concerne les vecteurs.

03 Produit d'un vecteur par un réel

ضرب متجهة في عدد حقيقي

DÉFINITION

Soient $\vec{u}\neq\vec{0}$ et k un réel non nul. Le vecteur $k\,\vec{u}$ a :

$$\text{même direction que } \vec{u} \quad ; \quad \text{même sens si } k>0,\ \text{sens contraire si } k<0$$

$$\|k\,\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$$

Par convention : $0\,\vec{u}=\vec{0}$ et $k\,\vec{0}=\vec{0}$.

بالعربية 💡 المتجهة $k\,\vec{u}$ لها نفس اتجاه $\vec{u}$: إذا كان $k>0$ فلها نفس المنحى، وإذا كان $k<0$ فمنحاها معاكس. طولها يساوي طول $\vec{u}$ مضروباً في $|k|$.

PROPRIÉTÉS — POUR TOUS VECTEURS ET RÉELS

On calcule avec les vecteurs comme avec des nombres : on développe, on réduit, on factorise.

$$k\,(\vec{u}+\vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v} \qquad ; \qquad k\,(k'\,\vec{u}) = (k \times k')\,\vec{u}$$

$$(k+k')\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u} \qquad ; \qquad k\,\vec{u} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

EXEMPLE — RÉDUIRE UNE EXPRESSION

Réduire $\vec{w} = 2(\vec{u} - 3\vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v})$.

$$\vec{w} = 2\vec{u} - 6\vec{v} - 3\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{u} - 3\vec{v}$$

04 Colinéarité, alignement et parallélisme

استقامة متجهتين، استقامة النقاط والتوازي

DÉFINITION — VECTEURS COLINÉAIRES

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction, c'est-à-dire si l'un est un multiple de l'autre. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires } \;\Leftrightarrow\; \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{v} = k\,\vec{u} \quad (\vec{u} \neq \vec{0})$$

À retenir — Les deux applications essentielles

Pour montrer...	On montre que...	بالعربية
A, B, C alignés	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$	استقامة ثلاث نقاط
(AB) // (CD)	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$	توازي مستقيمين

بالعربية 💡 نقول إن متجهتين مستقيمتان إذا كانت إحداهما تساوي الأخرى مضروبة في عدد حقيقي. لبرهنة أن ثلاث نقاط A Bg Cg مستقيمة، نبين أن $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$؛ ولبرهنة أن $(AB) // (CD)$ نبين أن $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.

EXEMPLE — MONTRER UN ALIGNEMENT

Soient A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$. Montrer que A, B, C sont alignés.

On fait apparaître $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$, soit $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : A, B, C sont alignés (et A est le milieu de [BC]).

05 Milieu d'un segment

منتصف قطعة

À RETENIR — 4 ÉCRITURES ÉQUIVALENTES

I est le milieu du segment [AB] si et seulement si l'une de ces égalités est vraie :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \quad (\text{ou } \overrightarrow{AI} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad \text{pour tout point M}$$

DÉMONSTRATION DE LA DERNIÈRE ÉGALITÉ

Avec Chasles :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}$$

بالعربية 💡 أهم خاصية للاستعمال في التمارين: I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$، ولكل نقطة M من المستوى لدينا $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

PIÈGE

$IA = IB$ (longueurs égales) ne suffit pas : I pourrait être n'importe où sur la médiatrice de [AB]. Il faut l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

06 Exercices corrigés

تمارين محلولة — حاول أولاً قبل قراءة الحل!

Exercice 1 — Relation de Chasles

1. Simplifier les expressions suivantes (M est un point quelconque) : a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$; b) $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC}$; c) $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que pour tous points A, B, C, D : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
3. ABCD est un quadrilatère tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Montrer que ABCD est un parallélogramme.

---

1) a) On enchaîne les lettres : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

b) $-\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM}$, donc $\vec{v} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

c) $-2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CA}$, donc $\vec{w} = 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}$.

2) On introduit D dans $\overrightarrow{AB}$ et B dans $\overrightarrow{CD}$:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}$. Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

3) D'après Chasles, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. L'hypothèse devient $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\ \Leftrightarrow$ ADCB est un parallélogramme, c'est le même quadrilatère que ABCD. ABCD est un parallélogramme.

Exercice 2 — Construction, alignement et parallélisme

ABC est un triangle et I est le milieu de [BC].

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
2. Montrer que $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$. En déduire que A, I, D sont alignés et que I est le milieu de [AD].
3. Soient E et F les points tels que $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{BC}$, puis que $(EF)\,//\,(BC)$.

---

1) D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme. On construit D comme le quatrième sommet.

2) I est le milieu de [BC], donc pour le point A : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ (propriété du milieu). Donc $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$: les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, donc A, I, D sont alignés. De plus $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$ est l'une des écritures du milieu : I est le milieu de [AD]. (On retrouve que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.)

3) Avec Chasles : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(EF)\,//\,(BC)$.

بالعربية 💡 الطريقة العامة في أغلب التمارين: (1) نستعمل علاقة شال لإدخال النقاط المناسبة، (2) نحسب بالمتجهات كما نحسب بالأعداد، (3) نصل إلى علاقة من نوع $\vec{v}=k\,\vec{u}$ ثم نستنتج الاستقامة أو التوازي.

07 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص الدرس ومعجم المصطلحات

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\ \Leftrightarrow\ ABDC \text{ parallélogramme}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\quad (\text{Chasles})$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\ \Leftrightarrow\ ABDC \text{ parallélogramme}$$

$$\|k\,\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$$

$$\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ A,B,C \text{ alignés}$$

$$\overrightarrow{CD}=k\,\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ (AB)\,//\,(CD)$$

$$I \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Écrire ABCD au lieu de ABDC pour $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Appliquer Chasles à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ sans lettre commune.
- Oublier que $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Croire que $AB + BC = AC$ pour les longueurs.
- Utiliser $IA = IB$ pour dire que I est le milieu.

Lexique français – arabe · معجم المصطلحات

Français	العربية
Vecteur	متجهة
Vecteur nul	المتجهة المنعدمة
Direction	الاتجاه
Sens	المنحى
Norme	المنظم
Vecteur opposé	مقابل متجهة
Égalité de deux vecteurs	تساوي متجهين
Parallélogramme	متوازي الأضلاع
Somme de deux vecteurs	مجموع متجهين
Relation de Chasles	علاقة شال
Produit par un réel	ضرب متجهة في عدد حقيقي
Translation	الإزاحة
Vecteurs colinéaires	متجهتان مستقيمتان
Points alignés	نقط مستقيمة
Droites parallèles	مستقيمان متوازيان
Milieu d'un segment	منتصف قطعة

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A