Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Calcul trigonométrique

الحساب المثلثي

Calcul trigonométrique au Tronc Commun : radians, cercle, sinus, cosinus, angles associés et équations, avec exemples et 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Le radian et le cercle trigonométrique
- Cosinus, sinus et tangente
- Angles associés
- Équations et inéquations trigonométriques

بالعربية 💡 نتعلم الراديان والدائرة المثلثية وجيب التمام والجيب والظل، والزوايا المرتبطة وحل المعادلات المثلثية.

01 Le radian et le cercle trigonométrique

الراديان والدائرة المثلثية

RADIAN

Angle au centre interceptant un arc de longueur 1 sur un cercle de rayon 1. Un tour vaut 2π radians : $180^\circ = \pi$ radians.

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \frac{\pi}{180}$$

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Cercle de centre O, rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, origine $I(1;0)$. Un réel x est une abscisse curviligne ; les abscisses d'un même point sont $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. L'abscisse principale appartient à $]-\pi;\pi]$.

EXEMPLE

$17\pi/3 = 6\pi - \pi/3$: principale $-\pi/3$.

02 Cosinus, sinus et tangente

جيب التمام والجيب والظل

$$M = (\cos x; \sin x), \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Non définie

EXEMPLE

$\sin x = 3/5, x \in [\pi/2; \pi]$: $\cos^2 x = 16/25$ mais cosinus négatif dans ce quart. $\cos x = -4/5$, $\tan x = -3/4$.

بالعربية 💡 إحداثيتا النقطة على الدائرة هما $(\cos x; \sin x)$ ولدينا دائماً $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

03 Angles associés

الزوايا المرتبطة

Angle	cos	sin	tan
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\tan x$
$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\tan x$
$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$
$\pi/2 - x$	$\sin x$	$\cos x$	$1/\tan x$
$\pi/2 + x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-1/\tan x$

Les formules de tangente s'appliquent uniquement lorsque toutes les expressions sont définies.

EXEMPLE

$\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, $\sin(7\pi/6) = -1/2$.

⚠ PIÈGE

Toujours vérifier le signe selon le quart du cercle.

04 Équations et inéquations trigonométriques

المعادلات والمتراجحات المثلثية

$$\cos x = \cos a \iff x = \pm a + 2k\pi$$

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

$$\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

EXEMPLE

$\cos x = 1/2$ donne $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$. Sur $[0; 2\pi[$: $\{\pi/3; 5\pi/3\}$.

Sur $[-\pi; \pi]$, $\cos x \geq 1/2$ donne $[-\pi/3; \pi/3]$ par lecture du cercle.

بالعربية 💡 نبحث عن زاوية معروفة ثم نكتب عائلتي الحلول مع إضافة مضاعفات 2π.

05 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Conversions

1. Convertir $30°$, $135°$, $210°$ en radians ; $5\pi/3$, $\pi/12$ et 2 radians en degrés (dernier arrondi).

$\pi/6$, $3\pi/4$, $7\pi/6$; $300°$, $15°$, $2 \times 180/\pi \approx 115°$.

Exercice 2 — Abscisse principale

1. Principale de $17\pi/3$, $25\pi/4$, $-13\pi/6$ et 11π ?

Retrancher un multiple de 2π : $-\pi/3$, $\pi/4$, $-\pi/6$, π.

Exercice 3 — Valeurs exactes

1. Calculer $\cos(5\pi/6)$, $\sin(7\pi/6)$, $\tan(2\pi/3)$, $\cos(-\pi/4)$, $\sin(11\pi/6)$, $\cos(4\pi/3)$.

$-\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}/2$, $-1/2$, $-1/2$.

Exercice 4 — Calculer cos et tan

1. $\sin x = 3/5$, $x \in [\pi/2; \pi]$: cos et tan ?
2. $\cos y = -1/3$, $y \in [-\pi; 0]$: sin et tan ?

$\cos x = -4/5$, $\tan x = -3/4$.

$\sin^2 y = 8/9$ et sinus négatif : $\sin y = -2\sqrt{2}/3$, $\tan y = 2\sqrt{2}$.

Exercice 5 — Simplifier

1. $A = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi/2 - x)$; $B = \sin(\pi - x) - \sin(-x) + \cos(\pi/2 + x)$; $C = \tan(\pi + x) + \tan(-x)$.

$A = -\cos x - \cos x + \cos x = -\cos x$; $B = \sin x + \sin x - \sin x = \sin x$; $C = 0$ sur son domaine.

Exercice 6 — Identités

1. Montrer $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$ et $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.

Développer : $2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$.

Différence de carrés : $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Exercice 7 — Équations

1. Résoudre dans R puis sur l'intervalle : $\cos x = 1/2$ sur $[0; 2\pi[$; $\sin x = -\sqrt{2}/2$ sur $]-\pi; \pi]$; $\tan x = \sqrt{3}$ sur $[0; 2\pi[$.

$x = \pm\pi/3 + 2k\pi$: $\{\pi/3; 5\pi/3\}$.

$x = -\pi/4 + 2k\pi$ ou $5\pi/4 + 2k\pi$: $\{-3\pi/4; -\pi/4\}$.

$x = \pi/3 + k\pi$: $\{\pi/3; 4\pi/3\}$.

Exercice 8 — Inéquations

1. $\cos x \geq 1/2$ sur $[-\pi; \pi]$; $\sin x > 0$ sur $[0; 2\pi]$; $\sin x \leq 1/2$ sur $[0; \pi]$.

$[-\pi/3; \pi/3]$; $]0; \pi[$; $[0; \pi/6] \cup [5\pi/6; \pi]$.

Exercice 9 — Second degré en cos

1. Résoudre $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ sur $[0; 2\pi[$ avec $X = \cos x$.

$(X - 1)(2X + 1) = 0$. Cosinus 1 ou -1/2 : $S = \{0; 2\pi/3; 4\pi/3\}$.

06 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

- Convertir avec π/180 ; principale dans]−π ; π].
- Retrouver le signe sur le cercle.
- Conserver toutes les familles de solutions avant restriction à l'intervalle.

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Oublier le signe du quart.
- Oublier la deuxième famille.
- Utiliser 2kπ pour la tangente au lieu de kπ.
- Confondre les sinus des angles associés.
- Mauvais mode degrés/radians sur la calculatrice.

Français	العربية
Radian	راديان
Cercle trigonométrique	الدائرة المثلثية
Abscisse curviligne	أفصول منحني
Abscisse principale	الأفصول المنحني الرئيسي
Cosinus	جيب التمام
Sinus	الجيب
Tangente	الظل
Angles associés	زوايا مرتبطة
Sens direct	المنحى المباشر
Équation trigonométrique	معادلة مثلثية

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A