Cours · Mathématiques | Tronc Commun Scientifique

Arithmétique dans ℕ

الحسابيات في ℕ

Cours de maths Tronc Commun : divisibilité, parité, nombres premiers, décomposition, PGCD et PPCM, avec exemples et 9 exercices corrigés.

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A

Télécharger le cours complet (PDF)

Objectifs de la séance

- Multiples et diviseurs
- Nombres pairs et impairs
- Critères de divisibilité
- Nombres premiers et décomposition
- PGCD et PPCM

بالعربية 💡 ندرس المضاعفات والقواسم والأعداد الأولية، ونتعلم التفكيك وحساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

01 Multiples et diviseurs

المضاعفات والقواسم

DÉFINITION

Pour $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$, b divise a (notation $b \mid a$) s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$.

- 0 est multiple de tout entier non nul ; 1 divise tout entier ; tout entier non nul se divise lui-même.
- Si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors $c \mid (a+b)$, $c \mid (a-b)$ si $a \geq b$, et $c \mid (\alpha a + \beta b)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.
- Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

EXEMPLE

$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$. Diviseurs : $\{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$, soit 9.

بالعربية 💡 العدد a مضاعف للعدد b إذا وجد عدد طبيعي k بحيث a = kb.

02 Nombres pairs et impairs

الأعداد الزوجية والفردية

DÉFINITION

n est pair si $n = 2k$, impair si $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

- Pair + pair = pair ; impair + impair = pair ; pair + impair = impair.
- Pair × entier = pair ; impair × impair = impair.
- n^2 a la même parité que n.
- $n(n+1)$ est toujours pair.

EXEMPLE

Si $n = 2k+1$, $n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Comme $k(k+1) = 2m$, $n^2 - 1 = 8m$: multiple de 8.

03 Critères de divisibilité

قواعد قابلية القسمة

Divisible par	Si et seulement si
2	Unités 0, 2, 4, 6 ou 8
5	Unités 0 ou 5
10	Unités 0
4	Les deux derniers chiffres forment un multiple de 4
25	Deux derniers chiffres 00, 25, 50 ou 75
3	La somme des chiffres est multiple de 3
9	La somme des chiffres est multiple de 9

EXEMPLE

4 716 : somme des chiffres 18, deux derniers chiffres 16. Divisible par 2, 3, 4 et 9, pas par 5.

PIÈGE

Divisible par 2 et 4 ne signifie pas divisible par 8 : contre-exemple 12. Divisible par 2 et 3 implique divisible par 6 car ils sont premiers entre eux.

04 Nombres premiers et décomposition

الأعداد الأولية والتفكيك

DÉFINITION

Un nombre premier admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 1 n'est pas premier ; 2 est le seul premier pair. Premiers nombres : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

TESTER UN NOMBRE PREMIER

Tester les nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$. Si aucun ne divise n, n est premier.

DÉCOMPOSITION

Tout entier $n \geq 2$ s'écrit de façon unique, à l'ordre près, en produit de nombres premiers. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

EXEMPLE

$\sqrt{221} \approx 14{,}9$: tester 2, 3, 5, 7, 11 et 13. $221 = 13 \times 17$ n'est pas premier.

بالعربية 💡 العدد الأولي له قاسمان فقط: 1 ونفسه. كل عدد أكبر من أو يساوي 2 يفكك بطريقة وحيدة إلى جداء عوامل أولية.

05 PGCD et PPCM

القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

DÉFINITION

PGCD : plus grand diviseur commun. PPCM : plus petit multiple commun non nul. Deux entiers sont premiers entre eux si leur PGCD vaut 1. Pour le PPCM non nul, on prend des entiers strictement positifs.

- PGCD : facteurs premiers communs, plus petit exposant.
- PPCM : tous les facteurs premiers, plus grand exposant.

$$\mathrm{PGCD}(a;b)\,\mathrm{PPCM}(a;b) = ab \quad (a,b \geq 1)$$

EXEMPLE

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. PGCD $= 12$, PPCM $= 2520$. $12 \times 2520 = 30240 = 360 \times 84$.

PIÈGE

Le PGCD ne conserve que les facteurs communs ; le PPCM les conserve tous.

بالعربية 💡 القاسم المشترك الأكبر يستعمل أصغر أس للعوامل المشتركة، والمضاعف المشترك الأصغر يستعمل أكبر أس لجميع العوامل.

06 Exercices corrigés

تمارين مصححة

Cherche d'abord seul, puis ouvre la correction pour comparer ta démarche.

Exercice 1 — Diviseurs

1. Lister les diviseurs de 48 et de 60, leurs diviseurs communs et leur PGCD.

$D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$; $D_{60} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$.

Communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12. PGCD = 12.

Exercice 2 — Critères de divisibilité

1. Parmi 2, 3, 4, 5, 9 et 25, lesquels divisent 1 350, 2 024 et 7 425 ?
2. Trouver le chiffre x pour que le nombre à trois chiffres $\overline{5x4}$ soit divisible par 9.

---

1 350 : 2, 3, 5, 9, 25 ; 2 024 : 2, 4 ; 7 425 : 3, 5, 9, 25.

$5 + x + 4 = 9 + x$: $x = 0$ ou 9, nombres 504 et 594.

Exercice 3 — Parité

1. Prouver que la somme de deux impairs est paire.
2. Prouver que $n^2 + n$ est pair.
3. Donner la parité de $n^2 + 3n + 5$.

$(2k + 1) + (2m + 1) = 2(k + m + 1)$.

$n^2 + n = n(n + 1)$ contient un facteur pair.

$n^2 + 3n + 5 = (n^2 + n) + 2n + 4 + 1$ est impair.

Exercice 4 — Nombres premiers

1. 97, 119, 221 et 283 sont-ils premiers ? Justifier.

---

97 : tester 2, 3, 5, 7, aucun ne divise, donc premier. 119 = 7 × 17 ; 221 = 13 × 17 : non premiers. 283 : tester 2, 3, 5, 7, 11, 13 ; aucun ne divise, donc premier.

Exercice 5 — Décomposition, PGCD et PPCM

1. Décomposer 504 et 540, calculer leur PGCD et PPCM, simplifier 504/540.

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$, $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$. PGCD $= 36$, PPCM $= 7560$. $504/540 = 14/15$.

Exercice 6 — Partage

1. Un fleuriste a 252 roses et 180 tulipes. Combien de bouquets identiques au maximum, utilisant toutes les fleurs ? Quelle composition ?

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, PGCD $= 36$. Il prépare 36 bouquets de 7 roses et 5 tulipes.

Exercice 7 — Rencontre

1. Deux bus partent à 7 h. Ils reviennent toutes les 18 et 24 minutes. Première rencontre ?

$18 = 2 \times 3^2$, $24 = 2^3 \times 3$. PPCM $= 72$ minutes. Rencontre à 8 h 12.

Exercice 8 — Raisonnement sur la parité

1. Si n est impair, montrer que $n^2 - 1$ est multiple de 8 ; appliquer à 2025.
2. Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est multiple de 6.

$n = 2k + 1$ donne $n^2 - 1 = 4k(k+1) = 8m$. 2025 est impair.

Parmi trois entiers consécutifs, l'un est pair et l'un est multiple de 3. Leur produit est multiple de 6.

Exercice 9 — Nombre de diviseurs

1. On admet que $p^a q^b$ possède $(a+1)(b+1)$ diviseurs pour p, q premiers distincts. Vérifier sur 36.
2. Combien de diviseurs pour $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$?
3. Trouver le plus petit entier ayant exactement six diviseurs.

$36 = 2^2 \times 3^2$: $3 \times 3 = 9$ diviseurs.

$4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs.

Formes possibles : p^5 (minimum 32) ou $p^2 q$ (minimum $2^2 \times 3 = 12$). Réponse 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

07 Fiche résumé et lexique français-arabe

ملخص ومعجم المصطلحات

$$b \mid a \iff a = kb$$

$$n = 2k \text{ ou } n = 2k + 1$$

$$\text{PGCD} \times \text{PPCM} = ab$$

⚠ TOP 5 DES ERREURS

- Considérer 1 comme premier.
- Confondre PGCD et PPCM.
- Oublier un facteur du PPCM.
- Déduire la divisibilité par 8 de celle par 2 et 4.
- Tester inutilement au-delà de la racine carrée.

Français	العربية
Multiple	مضاعف
Diviseur	قاسم
Divisible par	قابل للقسمة على
Pair / impair	زوجي / فردي
Nombre premier	عدد أولي
Décomposition	تفكيك
Facteur premier	عامل أولي
PGCD	القاسم المشترك الأكبر
PPCM	المضاعف المشترك الأصغر
Premiers entre eux	أوليان فيما بينهما
Critère de divisibilité	قاعدة قابلية القسمة

Rédigé et vérifié par Mohammed TAOUFIK, professeur et fondateur de MORAJA3A