MORAJA3A

MATHS · PHYSIQUE-CHIMIE · SVT

(P)

n(a ; b ; c)

COURS · 1ÈRE ANNÉE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · SEMESTRE 2 · GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Produit scalaire dans l'espace et applications

xx' + yy' + zz'

الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته

(S)

Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace, expression analytique dans un repère orthonormé, norme et distance, orthogonalité, vecteur normal et équation cartésienne d'un plan, distance d'un point à un plan, sphère : équation, intersection avec un plan, plan tangent.

Comprends. Entraîne-toi. Réussis.

Rédigé et vérifié par **Mohammed TAOUFIK**, professeur et fondateur de MORAJA3A

NIVEAU
1ère Bac — Sciences Expérimentales (BIOF)

CONTENU
Cours · Exemples · Pièges · 10 exercices + corrigés

PLATEFORME
moraja3a.app

Sommaire

فهرس الدرس

01	Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace	الجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء
02	Expression analytique dans un repère orthonormé	الصيغة التحليلية في معلم متعامد ممنظم
03	Plans de l'espace	المستويات في الفضاء
04	La sphère	الفلكة
05	Exercices (10 exercices gradués)	تمارين تطبيقية
06	Corrigés détaillés	التصحيح المفصل
07	Fiche résumé et lexique français–arabe	ملخص ومعجم المصطلحات

POURQUOI CE CHAPITRE EST IMPORTANT

On généralise à l'espace tout ce que tu sais du produit scalaire dans le plan : calcul de **longueurs**, d'**angles**, **orthogonalité**, équations de **plans** et de **sphères**. Ces outils sont à la base de la géométrie dans l'espace de 2ème Bac (produit vectoriel, droites et plans) et de nombreux problèmes de l'examen national.

بالعربية 💡

نعمم على الفضاء ما تعرفه عن الجداء السلمي في المستوى: حساب **المسافات** و**الزوايا**، **التعامد**، معادلات **المستويات** و**الفلكات**. هذه الأدوات أساس الهندسة الفضائية في السنة الثانية باكالوريا.

Comment utiliser ce cours

- **Définition** (encadré bleu) : ce qu'il faut savoir par cœur.
- **À retenir** (encadré vert) : la loi, la formule ou la méthode clé.
- **Exemple** (encadré doré) : une application corrigée pas à pas.
- **Piège** (encadré rouge) : l'erreur que font beaucoup d'élèves.
- **بالعربية** : une explication courte en arabe pour bien fixer l'idée.
- **Exercices** : énoncés classés APPLICATION APPROFONDISSEMENT TYPE EXAMEN ; tous les corrigés sont regroupés après les exercices.

1 Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

الجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء

DÉFINITION — PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C des points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Les points A, B, C sont dans un même plan (P). Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ calculé **dans le plan** (P) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

TOUTES LES PROPRIÉTÉS DU PLAN RESTENT VRAIES

- Symétrie et bilinéarité ;
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$; identités remarquables ;
- projection orthogonale : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ où H est le projeté de C sur (AB) ;
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

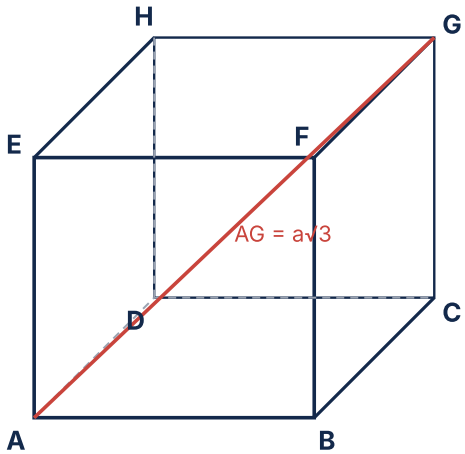
DANS UN CUBE

ABCDEFGH est un cube d'arête a. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$, $\vec{AE} \cdot \vec{BG}$ et $\vec{EB} \cdot \vec{EG}$.

Le projeté de G sur (AB) est B : $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = a^2$.

$\vec{BG} = \vec{BC} + \vec{CG}$ et $\vec{CG} = \vec{AE}$: $\vec{AE} \cdot \vec{BG} = \vec{AE} \cdot \vec{BC} + \vec{AE} \cdot \vec{AE} = 0 + a^2 = a^2$.

Le triangle EBG est équilatéral (côtés = diagonales de faces = $a\sqrt{2}$) : $\vec{EB} \cdot \vec{EG} = 2a^2 \times \cos 60° = a^2$.



DÉFINITION — ORTHOGONALITÉ D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ est **orthogonale** à un plan (P) dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Un tel vecteur $\vec{u}$ non nul est dit **normal** au plan (P).

💡 بالعربية

الجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء يحسب في مستوى يحتويهما، وتبقى كل خاصيات المستوى صالحة. يكون المستقيم **عموديا** على مستوى إذا كان عموديا على متجهتين غير مستقيميتين من هذا المستوى.

2 Expression analytique dans un repère orthonormé

الصيغة التحليلية في معلم متعامد ممنظم

FORMULES

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$AB = \sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)}$$

Et $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

EXEMPLE

A(1 ; 0 ; 2), B(3 ; 1 ; 0), C(0 ; 2 ; 3). Le triangle ABC est-il rectangle ?

$\vec{AB}(2 ; 1 ; -2)$, $\vec{AC}(-1 ; 2 ; 1)$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 + 2 - 2 = -2 \neq 0$.

$\vec{BA}(-2 ; -1 ; 2)$, $\vec{BC}(-3 ; 1 ; 3)$: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 6 - 1 + 6 = 11 \neq 0$.

$\vec{CA}(1 ; -2 ; -1)$, $\vec{CB}(3 ; -1 ; -3)$: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 3 + 2 + 3 = 8 \neq 0$.

Le triangle n'est pas rectangle. AB = 3, AC = √6, et cos Â = −2/(3√6) : l'angle Â est obtus.

PIÈGE

Les formules analytiques ne sont valables que dans un repère **orthonormé**. Et en dimension 3, il ne faut pas oublier le terme zz' !

💡 بالعربية

في معلم **متعامد ممنظم** في الفضاء: $u \cdot v = xx' + yy' + zz'$ و $\|u\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$. المتجهتان **متعامدتان** إذا وفقط إذا كان $xx' + yy' + zz' = 0$.

3 Plans de l'espace

المستويات في الفضاء

PLAN DÉFINI PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le **plan** passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

- Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$ a une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Réciproquement, si $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$.

EXEMPLE 1

Plan (P) passant par $A(1 ; -2 ; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2 ; -1 ; 1)$.

$2(x - 1) - (y + 2) + (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 7 = 0$.

EXEMPLE 2 — PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

$A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 3)$. On cherche $\vec{n}(a ; b ; c)$ orthogonal à $\vec{AB}(-1 ; 2 ; 0)$ et $\vec{AC}(-1 ; 0 ; 3)$:

$-a + 2b = 0$ et $-a + 3c = 0$. Avec $a = 6$: $b = 3$, $c = 2$. $\vec{n}(6 ; 3 ; 2)$ et (ABC) : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ (le point A donne $d = -6$).

POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

(P) : $ax + by + cz + d = 0$ et (P') : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$:

- (P) et (P') sont **parallèles** $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires ;
- (P) et (P') sont **perpendiculaires** $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.

DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

La distance du point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ au plan (P) : $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(A, (P)) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

EXEMPLE

Distance de O(0 ; 0 ; 0) au plan (ABC) : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

$d = |-6|/\sqrt{(36 + 9 + 4)} = 6/7$.

💡 **بالعربية**

المستوى المار من A والمتجهة $n(a ; b ; c)$ **منظمية** عليه له معادلة **ديكارتية** من الشكل $ax + by + cz + d = 0$.

مسافة نقطة عن مستوى: $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$.

4 La sphère

الفلكة

DÉFINITION — SPHÈRE

La **sphère** (S) de centre Ω et de rayon R > 0 est l'ensemble des points M de l'espace tels que ΩM = R.

ÉQUATIONS

Dans un repère orthonormé, la sphère de centre Ω(a ; b ; c) et de rayon R a pour équation :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Sphère de diamètre [AB] : $M \in (S) \Leftrightarrow \vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$.

ENSEMBLE D'ÉQUATION $X^2+Y^2+Z^2+AX+BY+\Gamma Z+\Delta=0$

On fait apparaître les formes canoniques : $(x+\alpha/2)^2+(y+\beta/2)^2+(z+\gamma/2)^2=k$.

- k > 0 : sphère de centre Ω(−α/2 ; −β/2 ; −γ/2) et de rayon √k ;
- k = 0 : le point Ω ;
- k < 0 : l'ensemble vide.

EXEMPLE

Nature de $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$.

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1+4+9-5=9$: sphère de centre Ω(1 ; −2 ; 3) et de rayon 3.

INTERSECTION D'UNE SPHÈRE ET D'UN PLAN

Soit d = d(Ω, (P)) la distance du centre au plan, et H le projeté orthogonal de Ω sur (P) :

- d > R : (P) ∩ (S) = ∅ ;
- d = R : (P) est **tangent** à (S) en H (un seul point commun) ;
- d < R : (P) ∩ (S) est un **cercle** de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

PLAN TANGENT EN UN POINT

Le plan tangent à la sphère (S) de centre Ω en un point A de (S) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{\Omega A}$: $M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{\Omega A}=0$.

EXEMPLE COMPLET

$(S) : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ et $(P) : x + 2y + 2z - 2 = 0$.

$d(\Omega, (P)) = |1 - 4 + 6 - 2|/\sqrt{(1 + 4 + 4)} = 1/3 < 3$: l'intersection est un **cercle** de rayon $r = \sqrt{(9 - 1/9)} = \sqrt{80}/3 = 4\sqrt{5}/3$.

Son centre H est le projeté de Ω sur (P) : $H = \Omega + t\vec{n}$ avec $\vec{n}(1 ; 2 ; 2)$, soit $H(1 + t ; -2 + 2t ; 3 + 2t)$.
$H \in (P) : 1 + t - 4 + 4t + 6 + 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow 9t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1/9$. Donc $H(8/9 ; -20/9 ; 25/9)$.

PIÈGE

Le rayon du cercle d'intersection n'est pas R : c'est $\sqrt{(R^2 - d^2)}$ (théorème de Pythagore dans le triangle ΩHM rectangle en H).

بالعربية 💡

معادلة **الفلكة** التي مركزها $\Omega(a ; b ; c)$ وشعاعها R هي $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. لدراسة تقاطع فلكة ومستوى نقارن $d(\Omega, P)$ مع R: إذا كان $d < R$ فالتقاطع **دائرة** شعاعها $\sqrt{(R^2 - d^2)}$.

5 Exercices

تمارين — حاول أولاً قبل قراءة التصحيح!

10 exercices classés par difficulté. Les corrigés sont regroupés dans la partie suivante : cherche d'abord seul !

EXERCICE 1 — CALCULS DANS UN REPÈRE — APPLICATION

Dans un repère orthonormé, on donne $\vec{u}(1 ; -2 ; 2)$, $\vec{v}(3 ; 0 ; -4)$ et $\vec{w}(2 ; m ; 1)$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. En déduire $\cos\theta$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Déterminer m pour que $\vec{u} \perp \vec{w}$.

EXERCICE 2 — NATURE D'UN TRIANGLE — APPLICATION

$A(2 ; 1 ; -1)$, $B(3 ; 3 ; 1)$, $C(4 ; 0 ; 1)$. Calculer AB, AC, BC et $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ? Calculer son aire.

EXERCICE 3 — ÉQUATIONS DE PLANS — APPLICATION

Dans un repère orthonormé, écrire une équation cartésienne du plan :

1. (P_1) passant par $A(2 ; -1 ; 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1 ; 3 ; -2)$;
2. (P_2) passant par $B(1 ; 1 ; 1)$ et parallèle à (P_1) ;
3. (P_3) médiateur du segment $[AB]$ (ensemble des points équidistants de A et B).

EXERCICE 4 — PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS — APPROFONDISSEMENT

$A(1 ; 1 ; 0)$, $B(2 ; 0 ; 1)$, $C(0 ; 2 ; 2)$.

1. Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC), puis une équation de ce plan.
3. Calculer la distance du point $D(3 ; 3 ; 3)$ au plan (ABC).

EXERCICE 5 — PLANS PARALLÈLES, PERPENDICULAIRES — APPROFONDISSEMENT

Soient $(P) : 2x - y + 3z - 1 = 0$, $(Q) : -4x + 2y - 6z + 5 = 0$ et $(R) : x + 5y + z = 0$.

1. Montrer que (P) et (Q) sont parallèles et calculer la distance entre ces deux plans.
2. Montrer que (P) et (R) sont perpendiculaires.

EXERCICE 6 — NATURE D'UN ENSEMBLE APPROFONDISSEMENT

Déterminer la nature des ensembles suivants :

1. $(E_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0$
2. $(E_2) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 10 = 0$
3. $(E_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z + 3 = 0$
4. (E_4) : ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ avec A(1 ; 2 ; 0) et B(3 ; 0 ; 2).

EXERCICE 7 — SPHÈRE ET PLAN APPROFONDISSEMENT

Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ et, pour $m \in \mathbb{R}$, le plan $(P_m) : 2x + y - 2z + m = 0$.

1. Déterminer le centre et le rayon de (S).
2. Discuter selon m la position relative de (P_m) et (S).
3. Pour m = 5, préciser la nature de l'intersection et son rayon.

EXERCICE 8 — PLAN TANGENT APPROFONDISSEMENT

Soit (S) la sphère de centre Ω(0 ; 1 ; −1) passant par A(2 ; 2 ; 1).

1. Calculer le rayon et écrire l'équation de (S).
2. Écrire l'équation du plan tangent à (S) en A.
3. Écrire les équations des plans tangents à (S) parallèles au plan (Q) : x + 2y + 2z = 0.

EXERCICE 9 — DANS UN CUBE TYPE EXAMEN

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On utilise le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées de tous les sommets.
2. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
3. Écrire une équation du plan (BDE).
4. Calculer la distance de A au plan (BDE). Montrer que la droite (AG) coupe (BDE) en un point K tel que $\vec{AK} = (1/3)\vec{AG}$.

EXERCICE 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN TYPE EXAMEN

Dans un repère orthonormé, on considère $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(0\,;\,1\,;\,2)$, $C(2\,;\,1\,;\,0)$ et l'ensemble $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1\,;\,1\,;\,1)$ et de rayon 2.
2. Montrer que A, B, C définissent un plan, que $\vec{n}(1\,;\,1\,;\,1)$ est normal à ce plan, et que $(ABC) : x + y + z - 3 = 0$.
3. Calculer $d(\Omega, (ABC))$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $(S) \cap (ABC)$.
4. Déterminer les équations des deux plans tangents à (S) et parallèles à (ABC), ainsi que leurs points de contact.

6 Corrigés détaillés

التصحيح المفصل للتمارين

CORRIGÉ 1 — CALCULS DANS UN REPÈRE

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(1+4+4)} = 3$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{(9+16)} = 5$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3+0-8 = -5$.

2. $\cos\theta = -5/15 = -1/3$.

3. $2 - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

CORRIGÉ 2 — NATURE D'UN TRIANGLE

$\vec{AB}(1\,;2\,;2)$, $\vec{AC}(2\,;-1\,;2)$, $\vec{BC}(1\,;-3\,;0)$. $AB = 3$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{10}$. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2-2+4 = 4 \neq 0$.

Le triangle est **isocèle en** A (non rectangle). $\cos\hat{A} = 4/9$, $\sin\hat{A} = \sqrt{(1-16/81)} = \sqrt{65}/9$. Aire $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{65}/9 = \sqrt{65}/2$.

CORRIGÉ 3 — ÉQUATIONS DE PLANS

1. $(x-2) + 3(y+1) - 2z = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2z + 1 = 0$.

2. Même vecteur normal : $x + 3y - 2z + d = 0$ avec $1 + 3 - 2 + d = 0$, $d = -2$: $x + 3y - 2z - 2 = 0$.

3. Le plan médiateur passe par le milieu $I(3/2\,;0\,;1/2)$ et a pour vecteur normal $\vec{AB}(-1\,;2\,;1)$: $-(x-3/2) + 2y + (z-1/2) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + z + 1 = 0$.

CORRIGÉ 4 — PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

1. $\vec{AB}(1\,;-1\,;1)$ et $\vec{AC}(-1\,;1\,;2)$ ne sont pas colinéaires (les rapports $1/(-1)$ et $1/2$ diffèrent).

2. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$: $a - b + c = 0$ et $-a + b + 2c = 0$. En ajoutant : $3c = 0$, donc $c = 0$ et $a = b$. $\vec{n}(1\,;1\,;0)$. (ABC) : $x + y + d = 0$ avec A : $d = -2$. (ABC) : $x + y - 2 = 0$.

3. $d(D, (ABC)) = |3 + 3 - 2|/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

CORRIGÉ 5 — PLANS PARALLÈLES, PERPENDICULAIRES

1. $\vec{n_Q}(-4\,;2\,;-6) = -2\vec{n_P}$: colinéaires, donc plans parallèles (et distincts car (Q) : $2x - y + 3z - 5/2 = 0$). Le point $A(0\,;-1\,;0)$ est dans (P) $(1 - 1 = 0)$.
$d(A, (Q)) = |0 - 2 + 0 + 5|/\sqrt{(16+4+36)} = 3/\sqrt{56} = 3/(2\sqrt{14})$.

2. $\vec{n_P}\cdot\vec{n_R} = 2 - 5 + 3 = 0$: perpendiculaires.

CORRIGÉ 6 — NATURE D'UN ENSEMBLE

1. $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4+1-1=4$: sphère de centre $(2\ ;0\ ;-1)$, rayon 2.
2. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=1+9-10=0$: le point $(-1\ ;3\ ;0)$.
3. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3-3=0$: le point $(1\ ;-1\ ;1)$.
4. Sphère de diamètre [AB] : centre $I(2\ ;1\ ;1)$, rayon $AB/2=\sqrt{(4+4+4)}/2=\sqrt{3}$. Équation $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$.

CORRIGÉ 7 — SPHÈRE ET PLAN

1. $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1+4+4=9$: $\Omega(1\ ;2\ ;0)$, $R=3$.

2. $d=|2+2+m|/3=|m+4|/3$. Tangent $\Leftrightarrow |m+4|=9 \Leftrightarrow m=5$ ou $m=-13$. Sécant (cercle) $\Leftrightarrow -13<m<5$. Pas d'intersection $\Leftrightarrow m<-13$ ou $m>5$.

3. $m=5$: $d=3=R$, le plan est **tangent** : l'intersection est un point (rayon 0). Ce point est le projeté de Ω : $H=\Omega+t(2\ ;1\ ;-2)$, $2(1+2t)+2+t+4t+5=0 \Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1$: $H(-1\ ;1\ ;2)$.

CORRIGÉ 8 — PLAN TANGENT

1. $R=\Omega A=\sqrt{(4+1+4)}=3$. (S) : $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.

2. $\vec{\Omega A}(2\ ;1\ ;2)$: $2(x-2)+(y-2)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z-8=0$.

3. Plans $x+2y+2z+d=0$ avec $d(\Omega)=3$: $|0+2-2+d|/3=3 \Leftrightarrow |d|=9$. Plans : $x+2y+2z+9=0$ et $x+2y+2z-9=0$.

CORRIGÉ 9 — DANS UN CUBE

1. A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;1;1), H(0;1;1).

2. $\vec{AG}(1\ ;1\ ;1)$, $\vec{BD}(-1\ ;1\ ;0)$, $\vec{BE}(-1\ ;0\ ;1)$. $\vec{AG}\cdot\vec{BD}=0$ et $\vec{AG}\cdot\vec{BE}=0$: $\vec{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : $(AG)\perp(BDE)$.

3. Vecteur normal $(1\ ;1\ ;1)$, passant par B : $x+y+z-1=0$.

4. $d(A,(BDE))=|-1|/\sqrt{3}=1/\sqrt{3}$. Le point K de (AG) s'écrit $(t\ ;t\ ;t)$; $K\in(BDE) \Leftrightarrow 3t=1 \Leftrightarrow t=1/3$: $K(1/3\ ;1/3\ ;1/3)$, donc $\vec{AK}=(1/3)\vec{AG}$, et $AK=\sqrt{3}/3=1/\sqrt{3}$ ✓ (K est le centre de gravité du triangle BDE).

CORRIGÉ 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN

1. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1+1+1+1 = 4 > 0$: sphère de centre $\Omega(1\,;1\,;1)$ et de rayon $R = 2$.

2. $\vec{AB}(-1\,;1\,;0)$ et $\vec{AC}(1\,;1\,;-2)$ ne sont pas colinéaires (la 3e coordonnée de $\vec{AB}$ est nulle mais pas celle de $\vec{AC}$) : A, B, C définissent un plan. $\vec{n}\cdot\vec{AB} = -1+1+0 = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{AC} = 1+1-2 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (ABC). Équation $x+y+z+d=0$; avec A : $1+0+2+d=0$, $d=-3$. ∎

3. $d(\Omega,(ABC)) = |1+1+1-3|/\sqrt{3} = 0$: le plan passe par le centre Ω. L'intersection est un **grand cercle** de centre $\Omega(1\,;1\,;1)$ et de rayon $\sqrt{(R^2-0)} = 2$.

4. Les plans cherchés ont une équation $x+y+z+d=0$ avec $|3+d|/\sqrt{3} = 2$, soit $3+d = \pm 2\sqrt{3}$: (P_1) : $x+y+z-3+2\sqrt{3}=0$ et (P_2) : $x+y+z-3-2\sqrt{3}=0$. Les points de contact sont les projetés de Ω : $T = \Omega + t(1\,;1\,;1)$ avec $|t|\sqrt{3} = 2$, soit $t = \pm 2/\sqrt{3} = \pm 2\sqrt{3}/3$. Donc
$T_1(1-2\sqrt{3}/3\,;1-2\sqrt{3}/3\,;1-2\sqrt{3}/3)$ sur (P_1) et $T_2(1+2\sqrt{3}/3\,;1+2\sqrt{3}/3\,;1+2\sqrt{3}/3)$ sur (P_2).
(Vérification pour T_2 : $3+2\sqrt{3}-3-2\sqrt{3}=0$ ✓.)

7 Fiche résumé

ملخص الدرس — للمراجعة السريعة

Quelle méthode pour quelle question ?

Je dois…	Méthode	بالعربية
calculer u · v, une norme, une distance	$xx' + yy' + zz'$; $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$	الصيغة التحليلية
montrer une orthogonalité	produit scalaire nul	التعامد
droite ⊥ plan	orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan	مستقيم عمودي على مستوى
équation d'un plan	$AM \cdot n = 0$; ou n orthogonal à AB et AC	معادلة مستوى
distance point–plan	$\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert / \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$	مسافة نقطة عن مستوى
nature d'une équation du 2nd degré	formes canoniques, signe de k	طبيعة مجموعة
sphère ∩ plan	comparer d(Ω, P) et R ; rayon $\sqrt{(R^2 - d^2)}$	تقاطع فلكة ومستوى

LES FORMULES CLÉS

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'$$

$$(P) : ax + by + cz + d = 0, n(a ; b ; c)$$

$$d = \lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert / \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$r = \sqrt{(R^2 - d^2)}$$

TOP 5 DES ERREURS

- Oublier le terme zz'.
- Prendre un vecteur normal orthogonal à un seul vecteur du plan.
- Oublier la valeur absolue dans la distance.
- Prendre R comme rayon du cercle d'intersection.
- Conclure « sphère » sans vérifier k > 0.

Lexique français — arabe معجم المصطلحات

Français	العربية	Français	العربية
Espace	الفضاء	Plans parallèles	مستويان متوازيان
Produit scalaire	الجداء السلمي	Plans perpendiculaires	مستويان متعامدان
Repère orthonormé	معلم متعامد ممنظم	Distance	مسافة
Norme	منظم	Sphère	فلكة
Orthogonal	عمودي	Centre	مركز
Vecteur normal	متجهة منظمية	Rayon	شعاع
Plan	مستوى	Plan tangent	مستوى مماس
Équation cartésienne	معادلة ديكارتية	Projeté orthogonal	المسقط العمودي

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Séance d'essai 100 % gratuite.

Cours en direct sur Google Meet · Petits groupes de 8 élèves max · Programme marocain · moraja3a.app · WhatsApp +212 617 638 536

احجز حصتك التجريبية المجانية على موقع moraja3a.app — افهم، تدرّب، انجح.