MORAJA3A

MATHS · PHYSIQUE-CHIMIE · SVT

COURS · 1ÈRE ANNÉE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · SEMESTRE 1 · ALGÈBRE

Généralités sur les fonctions

عموميات حول الدوال

Ensemble de définition, parité, fonctions majorées, minorées, bornées, extremums, comparaison, monotonie, composition de fonctions, fonctions de référence et éléments de symétrie d'une courbe.

Comprends. Entraîne-toi. Réussis.

Rédigé et vérifié par **Mohammed TAOUFIK**, professeur et fondateur de MORAJA3A

NIVEAU
1ère Bac — Sciences Expérimentales (BIOF)

CONTENU
Cours · Exemples · Pièges · 10 exercices + corrigés

PLATEFORME
moraja3a.app

Sommaire

فهرس الدرس

01	Ensemble de définition et parité	مجموعة التعريف وزوجية دالة
02	Fonctions majorées, minorées, bornées — extremums	الدوال المكبورة والمصغورة والمحدودة — المطاريف
03	Monotonie et composition	رتابة دالة ومركب دالتين
04	Fonctions de référence	الدوال المرجعية
05	Éléments de symétrie d'une courbe	عناصر تماثل منحنى
06	Exercices (10 exercices gradués)	تمارين تطبيقية
07	Corrigés détaillés	التصحيح المفصل
08	Fiche résumé et lexique français–arabe	ملخص ومعجم المصطلحات

POURQUOI CE CHAPITRE EST IMPORTANT

Ce chapitre fournit tous les **outils de base** pour étudier une fonction : où elle est définie, ses symétries, ses variations, ses bornes. Tu les réutiliseras dans les chapitres **Limites**, **Dérivation** et **Étude de fonctions**, puis toute l'année de 2ème Bac. La composition de fonctions, nouvelle cette année, est essentielle pour la dérivation.

💡 بالعربية

هذا الدرس يعطيك **الأدوات الأساسية** لدراسة دالة: مجموعة التعريف، الزوجية، التغيرات، المكبورة والمصغورة، و**مركب دالتين**. ستستعملها في دروس النهايات والاشتقاق ودراسة الدوال.

Comment utiliser ce cours

- **Définition** (encadré bleu) : ce qu'il faut savoir par cœur.
- **À retenir** (encadré vert) : la loi, la formule ou la méthode clé.
- **Exemple** (encadré doré) : une application corrigée pas à pas.
- **Piège** (encadré rouge) : l'erreur que font beaucoup d'élèves.
- **بالعربية** : une explication courte en arabe pour bien fixer l'idée.
- **Exercices** : énoncés classés APPLICATION APPROFONDISSEMENT TYPE EXAMEN ; tous les corrigés sont regroupés après les exercices.

1 Ensemble de définition et parité

مجموعة التعريف وزوجية دالة

DÉFINITION — ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'**ensemble de définition** D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels f(x) existe.

LES CONDITIONS À VÉRIFIER

Si f(x) contient…	Condition
un quotient A(x)/B(x)	$B(x) \neq 0$
une racine $\sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
un quotient $A(x)/\sqrt{B(x)}$	$B(x) > 0$
tan(x)	$x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

EXEMPLE

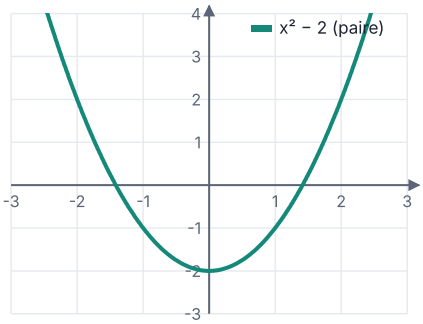
$f(x) = \sqrt{(x-1)}/(x^2-4)$.

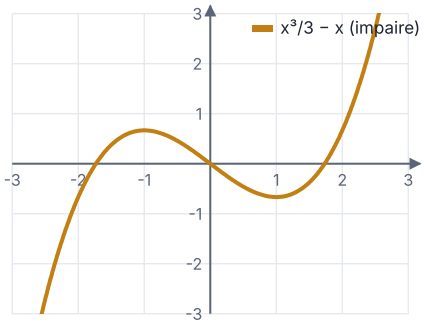
Il faut $x - 1 \geq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$, soit $x \geq 1$ et $x \neq 2$ et $x \neq -2$. Donc $D_f = [1\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$.

DÉFINITION — FONCTION PAIRE, FONCTION IMPAIRE

On dit que D_f est **symétrique par rapport à 0** si : pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$.

- f est **paire** si D_f est symétrique et $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.
- f est **impaire** si D_f est symétrique et $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'**origine** O.





EXEMPLE

$g(x) = x/(x^2 + 1)$: $D_g = \mathbb{R}$ est symétrique, et $g(-x) = -x/(x^2 + 1) = -g(x)$: g est **impaire**.

$h(x) = x^2 + x$: $h(-1) = 0$ et $h(1) = 2$, donc $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$: h n'est **ni paire ni impaire**.

PIÈGE

Toujours vérifier d'abord que D_f est symétrique ! $f(x) = x^2$ sur $[-1 ; 2]$ n'est pas paire. Et pour montrer qu'une fonction n'est pas paire, il suffit d'un contre-exemple numérique.

💡 بالعربية

مجموعة التعريف هي مجموعة الأعداد x التي يكون من أجلها f(x) معرفا. الدالة **زوجية** إذا f(-x) = f(x) (منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب)، و**فردية** إذا f(-x) = -f(x) (منحناها متماثل بالنسبة لأصل المعلم).

2 Fonctions majorées, minorées, bornées — extremums

الدوال المكبورة والمصغورة والمحدودة — المطاريف

DÉFINITION — MAJORÉE, MINORÉE, BORNÉE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que : $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que : $\forall x \in I, f(x) \geq m$.
- f est **bornée** sur I si elle est majorée et minorée, ce qui équivaut à : $\exists k > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq k$.

EXEMPLE

$f(x) = 3 - 2/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. Comme $x^2 + 1 \geq 1$, on a $0 < 1/(x^2 + 1) \leq 1$, donc $-2 \leq -2/(x^2 + 1) < 0$ et $1 \leq f(x) < 3$. f est **bornée**.

DÉFINITION — MAXIMUM ET MINIMUM

$f(a)$ est le **maximum** de f sur I ($a \in I$) si $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$. $f(b)$ est le **minimum** de f sur I si $\forall x \in I, f(x) \geq f(b)$. Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**.

On parle d'extremum **relatif** (local) quand l'inégalité n'est vraie que sur un intervalle ouvert contenant a.

PIÈGE — MAJORANT OU MAXIMUM ?

Dans l'exemple ci-dessus, 3 est un **majorant** de f mais **pas** un maximum : aucun x ne donne $f(x) = 3$. En revanche $f(0) = 1$ est le **minimum** de f. Un maximum doit être **atteint**.

Comparaison de deux fonctions مقارنة دالتين

DÉFINITION — COMPARAISON

Soient f et g définies sur I. On dit que $f \leq g$ sur I si $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$. Graphiquement, la courbe de f est **en dessous** de celle de g sur I.

Pour comparer : on étudie le **signe de** $f(x) - g(x)$.

POSITION RELATIVE

Comparer $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x) - g(x) = x(x-1)$: positif sur $]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ et négatif sur $[0 ; 1]$. Donc C_f est au-dessus de C_g hors de $[0 ; 1]$ et en dessous sur $[0 ; 1]$.

💡 **بالعربية**

الدالة **مكبورة** إذا وجد عدد M بحيث $f(x) \leq M$، و**مصغورة** إذا وجد m بحيث $f(x) \geq m$، و**محدودة** إذا كانت مكبورة ومصغورة. **القيمة القصوى** يجب أن تكون **متحققة** من أجل عدد ما.

3 Monotonie et composition

رتابة دالة ومركب دالتين

DÉFINITION — SENS DE VARIATION

Soit f définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si : pour tous a, b ∈ I, a < b ⇒ f(a) ≤ f(b).
- f est **décroissante** sur I si : a < b ⇒ f(a) ≥ f(b).
- Avec des inégalités strictes : **strictement** croissante / décroissante.

LE TAUX DE VARIATION

Pour a ≠ b dans I, on pose :

$$T(a, b) = (f(a) - f(b)) / (a - b)$$

- f est croissante sur I ⇔ T(a, b) ≥ 0 pour tous a ≠ b de I.
- f est décroissante sur I ⇔ T(a, b) ≤ 0 pour tous a ≠ b de I.

EXEMPLE

Variations de f(x) = 1/(x − 2) sur]2 ; +∞[.

f(a) − f(b) = (b − a)/((a − 2)(b − 2)), donc T(a, b) = −1/((a − 2)(b − 2)). Pour a, b > 2, (a − 2)(b − 2) > 0, donc T < 0 : f est **strictement décroissante** sur]2 ; +∞[.

VARIATIONS DE F + K, KF, F + G

- f et f + k ont le même sens de variation.
- Si k > 0, kf a le même sens que f ; si k < 0, le sens est **inversé**.
- Si f et g sont croissantes sur I, f + g est croissante sur I (de même pour décroissantes).

Composée de deux fonctions مركب دالتين

DÉFINITION — COMPOSÉE

Soient f définie sur D_f et g définie sur D_g. La **composée** de f par g est la fonction notée g ∘ f (« g rond f ») définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Son ensemble de définition est $D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$.

EXEMPLE

$f(x) = x - 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $(g \circ f)(x) = \sqrt{(x-3)}$ avec $D_{g\circ f} = [3 ; +\infty[$, et $(f \circ g)(x) = \sqrt{x} - 3$ avec $D_{f\circ g} = [0 ; +\infty[$.

On voit que $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

DÉCOMPOSER UNE FONCTION

$h(x) = 1/(x^2 + 1)$ s'écrit $h = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 1/x$.

MONOTONIE D'UNE COMPOSÉE

Si f est monotone sur I et g monotone sur J avec $f(I) \subset J$, alors :

- f et g de **même sens** ⇒ $g \circ f$ est **croissante** sur I ;
- f et g de **sens contraires** ⇒ $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

APPLICATION

Variations de $h(x) = \sqrt{(4-x)}$ sur $]-\infty ; 4]$.

$h = g \circ f$ avec $f(x) = 4 - x$ (décroissante sur $]-\infty ; 4]$, à valeurs dans $[0 ; +\infty[$) et $g(x) = \sqrt{x}$ (croissante sur $[0 ; +\infty[$). Sens contraires : h est **décroissante** sur $]-\infty ; 4]$.

PIÈGE

Bien vérifier que $f(I) \subset J$: f doit envoyer I dans l'intervalle où l'on connaît la monotonie de g.

بالعربية

مركب الدالتين f و g هو الدالة $g \circ f$ المعرفة بـ $g(f(x))$. إذا كان لـ f و g **نفس** منحى التغير فإن $g \circ f$ **تزايدية**، وإذا كان لهما منحيان **متعاكسان** فإن $g \circ f$ **تناقصية**.

4 Fonctions de référence

الدوال المرجعية

La fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

FORME CANONIQUE ET PARABOLE

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -b/(2a) \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

La courbe est une **parabole** de sommet $S(\alpha ; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a > 0$		↘	β	↗	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a < 0$		↗	β	↘	

EXEMPLE

$f(x) = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$. Sommet $S(1 ; -1)$, f décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$, minimum -1.

La fonction homographique $x \mapsto (ax + b)/(cx + d)$ الدالة المتخاطة

FORME RÉDUITE ET HYPERBOLE

Avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, on a $D_f = \mathbb{R} - \{-d/c\}$ et on peut écrire :

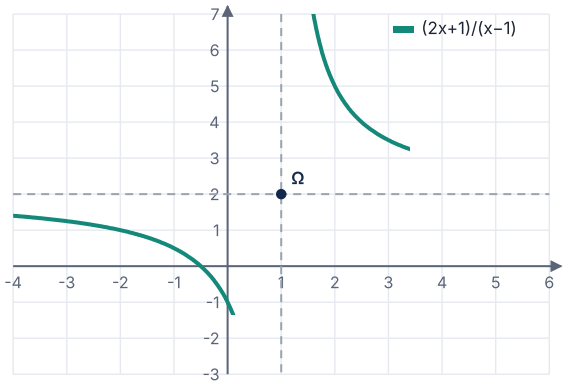
$$f(x) = \beta + k/(x - \alpha) \text{ avec } \alpha = -d/c \text{ et } \beta = a/c$$

La courbe est une **hyperbole** de centre $\Omega(\alpha ; \beta)$, d'asymptotes les droites $x = \alpha$ et $y = \beta$.

- Si $k > 0$ ($\Leftrightarrow ad - bc < 0$) : f est décroissante sur chaque intervalle.
- Si $k < 0$ ($\Leftrightarrow ad - bc > 0$) : f est croissante sur chaque intervalle.

EXEMPLE

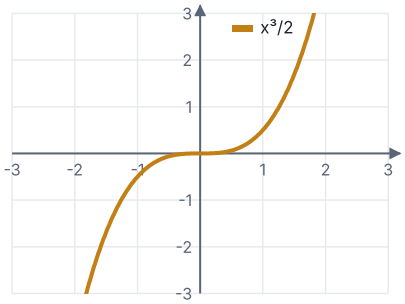
$f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$. Division : $2x + 1 = 2(x - 1) + 3$, donc $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$. Centre $\Omega(1 ; 2)$, $k = 3 > 0$: f décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

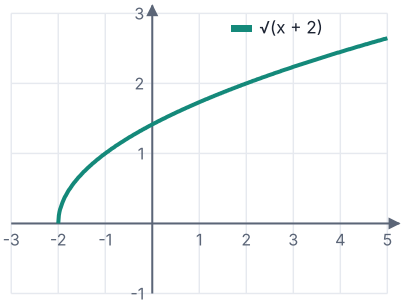


Les fonctions x ↦ ax³ et x ↦ √(x + a) الدالتان x ↦ ax³ و x ↦ √(x + a)

À RETENIR

- x ↦ ax³ est **impaire** ; elle est croissante sur ℝ si a > 0, décroissante si a < 0.
- x ↦ √(x + a) est définie sur [−a ; +∞[et y est croissante ; sa courbe est une demi-parabole d'origine (−a ; 0).





💡 بالعربية

الدوال المرجعية: الدالة **الحدودية من الدرجة الثانية** منحناها شلجم رأسه S(α ; β)، والدالة **المتخاطة** منحناها هذلول مركزه Ω(α ; β). اكتب دائما الشكل النموذجي أو المختزل قبل الدراسة.

5 Éléments de symétrie d'une courbe

عناصر تماثل منحنى

AXE DE SYMÉTRIE

La droite d'équation x = a est un **axe de symétrie** de C_f si et seulement si, pour tout x de D_f :

$$2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x)$$

CENTRE DE SYMÉTRIE

Le point Ω(a ; b) est un **centre de symétrie** de C_f si et seulement si, pour tout x de D_f :

$$2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

AXE DE SYMÉTRIE

Montrer que la droite x = 1 est un axe de symétrie de la courbe de $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

$D_f = \mathbb{R}$ et pour tout x, $2 - x \in \mathbb{R}$.

$f(2 - x) = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3 = 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 3 = f(x)$. ∎

CENTRE DE SYMÉTRIE

Montrer que Ω(1 ; 2) est centre de symétrie de la courbe de $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$.

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$; si $x \neq 1$, alors $2 - x \neq 1$. On utilise $f(x) = 2 + 3/(x - 1)$:

$f(2 - x) = 2 + 3/(1 - x) = 2 - 3/(x - 1)$. Donc $f(2 - x) + f(x) = 4 = 2 \times 2$. ∎

PIÈGE

On écrit 2a − x, pas a − x. Pense au milieu : x et 2a − x ont pour milieu a.

بالعربية

المستقيم x = a **محور تماثل** للمنحنى إذا كان f(2a - x) = f(x)، والنقطة Ω(a ; b) **مركز تماثل** له إذا كان f(2a - x) + f(x) = 2b، مع التحقق من أن 2a - x ينتمي إلى مجموعة التعريف.

6 Exercices

تمارين — حاول أولاً قبل قراءة التصحيح!

10 exercices classés par difficulté. Les corrigés sont regroupés dans la partie suivante : cherche d'abord seul !

EXERCICE 1 — ENSEMBLES DE DÉFINITION APPLICATION

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

1. $f_1(x) = (3x - 1)/(x^2 - 5x + 6)$
2. $f_2(x) = \sqrt{(2 - x)} + 1/x$
3. $f_3(x) = \sqrt{(x^2 - 9)}$
4. $f_4(x) = (x + 1)/\sqrt{(4 - x^2)}$
5. $f_5(x) = 1/(|x| - 3)$

EXERCICE 2 — PARITÉ APPLICATION

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
2. $g(x) = x^3 - 2x$
3. $h(x) = (x^2 + 1)/x$
4. $k(x) = \sqrt{(x + 1)}$
5. $l(x) = |x| + x^2$
6. $m(x) = x^2 + x + 1$

EXERCICE 3 — FONCTION BORNÉE, EXTREMUM APPLICATION

Soit $f(x) = (x^2 + 3)/(x^2 + 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = 1 + 2/(x^2 + 1)$.
2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. f admet-elle un maximum ? un minimum ?

EXERCICE 4 — TAUX DE VARIATION APPROFONDISSEMENT

1. Étudier, à l'aide du taux de variation, les variations de $f(x) = x^2 + 4x$ sur $]-\infty ; -2]$ et sur $[-2 ; +\infty[$.
2. Même question pour $g(x) = (x + 2)/(x + 1)$ sur $]-1 ; +\infty[$.

EXERCICE 5 — COMPOSITION APPROFONDISSEMENT

Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$, $u(x) = 1/x$.

1. Déterminer $g \circ f$ et son ensemble de définition.
2. Déterminer $f \circ g$ et $u \circ f$ avec leurs ensembles de définition.
3. Écrire $h(x) = \sqrt{(3x + 6)}$ et $k(x) = (2x - 1)^2$ comme composées de deux fonctions.

EXERCICE 6 — MONOTONIE D'UNE COMPOSÉE APPROFONDISSEMENT

Déterminer les variations de :

1. $h(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$ sur $[0 ; +\infty[$ et sur $]-\infty ; 0]$.
2. $k(x) = 1/(x^2 - 2x + 3)$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra écrire $x^2 - 2x + 3$ sous forme canonique).

EXERCICE 7 — FONCTION HOMOGRAPHIQUE APPROFONDISSEMENT

Soit $f(x) = (3x - 1)/(x + 2)$.

1. Déterminer D_f et deux réels β et k tels que $f(x) = \beta + k/(x + 2)$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que $\Omega(-2 ; 3)$ est un centre de symétrie de C_f.
4. Résoudre $f(x) \leq 2$.

EXERCICE 8 — AXE DE SYMÉTRIE ET PARABOLE APPROFONDISSEMENT

Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique. En déduire le sommet de la parabole et les variations de f.
2. Montrer que la droite $x = 3$ est un axe de symétrie de C_f.
3. Montrer que f est majorée par 4 sur $\mathbb{R}$. Est-ce un maximum ?

EXERCICE 9 — COMPARAISON ET POSITION RELATIVE TYPE EXAMEN

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$ définies sur $[0 ; +\infty[$, et $h(x) = (x + 1)/2$.

1. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\sqrt{x} \leq (x + 1)/2$. Quand a-t-on l'égalité ?
3. En déduire que pour tout $x \geq 0$: $\sqrt{(x^2 + 1)} \leq (x^2 + 2)/2$.

EXERCICE 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN TYPE EXAMEN

Soit $f(x) = (x^2 - 2x + 2)/(x - 1)$.

1. Déterminer D_f et montrer que $f(x) = x - 1 + 1/(x - 1)$.
2. Montrer que $\Omega(1 ; 0)$ est un centre de symétrie de C_f.
3. Soit $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x + 1/x$. Vérifier que $f = v \circ u$.
4. À l'aide du taux de variation, montrer que v est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.
5. En déduire les variations de f sur $]1 ; 2]$ et sur $[2 ; +\infty[$, puis montrer que $f(x) \geq 2$ pour tout $x > 1$.

7 Corrigés détaillés

التصحيح المفصل للتمارين

CORRIGÉ 1 — ENSEMBLES DE DÉFINITION

1. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) \neq 0$: $D = \mathbb{R} - \{2 ; 3\}$.
2. $2 - x \geq 0$ et $x \neq 0$: $D =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 2]$.
3. $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ou $x \geq 3$: $D =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$.
4. $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$: $D =]-2 ; 2[$.
5. $|x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq -3$: $D = \mathbb{R} - \{-3 ; 3\}$.

CORRIGÉ 2 — PARITÉ

1. $D = \mathbb{R}$ symétrique ; $f(-x) = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$: **paire**.
2. $g(-x) = -x^3 + 2x = -g(x)$: **impaire**.
3. $D = \mathbb{R}^*$ symétrique ; $h(-x) = (x^2 + 1)/(-x) = -h(x)$: **impaire**.
4. $D = [-1 ; +\infty[$ n'est pas symétrique ($2 \in D$ mais $-2 \notin D$) : **ni paire ni impaire**.
5. $I(-x) = |x| + x^2 = I(x)$: **paire**.
6. $m(1) = 3$ et $m(-1) = 1$: $m(-1) \neq m(1)$ et $m(-1) \neq -m(1)$: **ni paire ni impaire**.

CORRIGÉ 3 — FONCTION BORNÉE, EXTREMUM

1. $1 + 2/(x^2 + 1) = (x^2 + 1 + 2)/(x^2 + 1) = (x^2 + 3)/(x^2 + 1)$. ∎

2. $x^2 + 1 \geq 1$ donc $0 < 2/(x^2 + 1) \leq 2$, d'où $1 < f(x) \leq 3$: f est bornée.

3. $f(0) = 3$ et $f(x) \leq 3$ pour tout x : **3 est le maximum**, atteint en 0. Le minorant 1 n'est jamais atteint ($2/(x^2 + 1) > 0$) : f n'admet **pas de minimum**.

CORRIGÉ 4 — TAUX DE VARIATION

1. $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 + 4(a - b) = (a - b)(a + b + 4)$, donc $T(a, b) = a + b + 4$.

- Si $a, b \geq -2$ (distincts), $a + b > -4$, $T > 0$: f strictement croissante sur $[-2 ; +\infty[$.
- Si $a, b \leq -2$, $a + b < -4$, $T < 0$: f strictement décroissante sur $]-\infty ; -2]$.

2. $g(x) = 1 + 1/(x + 1)$. $g(a) - g(b) = (b - a)/((a + 1)(b + 1))$, donc $T(a, b) = -1/((a + 1)(b + 1)) < 0$ pour $a, b > -1$: g est strictement décroissante sur $]-1 ; +\infty[$.

CORRIGÉ 5 — COMPOSITION

1. $(g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2 - 1)}$; il faut $x^2 - 1 \geq 0$: $D =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.

2. $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$ mais seulement pour $x \geq 0$: $D = [0 ; +\infty[$. $(u \circ f)(x) = 1/(x^2 - 1)$: $D = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$.

3. $h = g \circ v$ avec $v(x) = 3x + 6$ et $g(x) = \sqrt{x}$. $k = w \circ v'$ avec $v'(x) = 2x - 1$ et $w(x) = x^2$.

CORRIGÉ 6 — MONOTONIE D'UNE COMPOSÉE

1. $h = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 1$ (à valeurs dans $[1 ; +\infty[\subset [0 ; +\infty[$) et $g(x) = \sqrt{x}$ croissante. Sur $[0 ; +\infty[$, f est croissante : h **croissante**. Sur $]-\infty ; 0]$, f est décroissante : h **décroissante**.

2. $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$. $k = u \circ f$ avec $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ à valeurs dans $[2 ; +\infty[$ et $u(x) = 1/x$ décroissante sur $]0 ; +\infty[$. f décroît sur $]-\infty ; 1]$: k **croît**. f croît sur $[1 ; +\infty[$: k **décroît**. Maximum $k(1) = 1/2$.

CORRIGÉ 7 — FONCTION HOMOGRAPHIQUE

1. $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. $3x - 1 = 3(x + 2) - 7$, donc $f(x) = 3 - 7/(x + 2)$: $\beta = 3$, $k = -7$.

2. $k < 0$: f est croissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f(x)		↗	‖	↗	

3. Si $x \neq -2$, $-4 - x \neq -2$. $f(-4 - x) = 3 - 7/(-2 - x) = 3 + 7/(x + 2)$, donc $f(-4 - x) + f(x) = 6 = 2 \times 3$. ∎

4. $f(x) - 2 = (3x - 1 - 2x - 4)/(x + 2) = (x - 5)/(x + 2) \leq 0$. Tableau de signes : $S =]-2 ; 5]$.

CORRIGÉ 8 — AXE DE SYMÉTRIE ET PARABOLE

1. $f(x) = -(x^2 - 6x) - 5 = -[(x - 3)^2 - 9] - 5 = -(x - 3)^2 + 4$. Sommet $S(3 ; 4)$. $a = -1 < 0$: f croissante sur $]-\infty ; 3]$, décroissante sur $[3 ; +\infty[$.

2. $f(6 - x) = -(3 - x)^2 + 4 = -(x - 3)^2 + 4 = f(x)$. ∎

3. $-(x - 3)^2 \leq 0$ donc $f(x) \leq 4$. Et $f(3) = 4$: c'est le **maximum**.

CORRIGÉ 9 — COMPARAISON ET POSITION RELATIVE

1. $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$. Sur $[0 ; 1]$, $1 - \sqrt{x} \geq 0$: $f(x) \geq g(x)$, C_f au-dessus. Sur $[1 ; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$, C_f en dessous. Les courbes se coupent en $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$.

2. $(x + 1)/2 - \sqrt{x} = (x - 2\sqrt{x} + 1)/2 = (\sqrt{x} - 1)^2/2 \geq 0$. Égalité $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

3. On applique 2 avec $X = x^2 + 1 \geq 0$: $\sqrt{(x^2 + 1)} \leq (x^2 + 1 + 1)/2 = (x^2 + 2)/2$. ∎

CORRIGÉ 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN

1. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. $x - 1 + 1/(x-1) = ((x-1)^2 + 1)/(x-1) = (x^2 - 2x + 2)/(x-1)$. ∎

2. Si $x \neq 1$ alors $2 - x \neq 1$. $f(2-x) = 1 - x + 1/(1-x) = -(x-1) - 1/(x-1) = -f(x)$. Donc $f(2-x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$. ∎

3. $v(u(x)) = (x-1) + 1/(x-1) = f(x)$. ∎

4. $v(a) - v(b) = (a-b) + (b-a)/(ab) = (a-b)(1 - 1/(ab))$, donc $T(a,b) = (ab-1)/(ab)$. Sur $]0\ ;\ 1]$ (avec $a \neq b$), $0 < ab < 1$: $T < 0$, v décroissante. Sur $[1\ ;\ +\infty[$, $ab > 1$: $T > 0$, v croissante.

5. u est croissante et envoie $]1\ ;\ 2]$ sur $]0\ ;\ 1]$, et $[2\ ;\ +\infty[$ sur $[1\ ;\ +\infty[$. Par composition : f est **décroissante** sur $]1\ ;\ 2]$ et **croissante** sur $[2\ ;\ +\infty[$. Donc $f(2) = 2$ est le minimum de f sur $]1\ ;\ +\infty[$: $f(x) \geq 2$. ∎

8 Fiche résumé

ملخص الدرس — للمراجعة السريعة

Quelle méthode pour quelle question ?

Je dois…	Méthode	بالعربية
trouver D_f	dénominateur ≠ 0, sous la racine ≥ 0	مجموعة التعريف
étudier la parité	D_f symétrique, puis calculer f(−x)	الزوجية
montrer que f est bornée	encadrer f(x) : m ≤ f(x) ≤ M	دالة محدودة
étudier les variations	taux de variation, ou composée, ou forme canonique	الرتابة
comparer f et g	signe de f(x) − g(x)	مقارنة دالتين
axe x = a	f(2a − x) = f(x)	محور تماثل
centre Ω(a ; b)	f(2a − x) + f(x) = 2b	مركز تماثل

LES FORMULES CLÉS

$$T(a, b) = (f(a) - f(b))/(a - b)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

même sens ⇒ g∘f ↗ ; sens contraires ⇒ g∘f ↘

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$(ax + b)/(cx + d) = \beta + k/(x - \alpha)$$

TOP 5 DES ERREURS

- Étudier la parité sans vérifier que D_f est symétrique.
- Confondre majorant et maximum.
- Croire que g ∘ f = f ∘ g.
- Oublier la condition f(I) ⊂ J pour une composée.
- Écrire f(a − x) au lieu de f(2a − x).

Lexique français — arabe معجم المصطلحات

Français	العربية	Français	العربية
Ensemble de définition	مجموعة التعريف	Taux de variation	معدل التغير
Fonction paire	دالة زوجية	Croissante	تزايدية
Fonction impaire	دالة فردية	Décroissante	تناقصية
Majorée	مكبورة	Composée	مركب دالتين
Minorée	مصغورة	Parabole	شلجم
Bornée	محدودة	Hyperbole	هذلول
Maximum	قيمة قصوى	Axe de symétrie	محور تماثل
Minimum	قيمة دنيا	Centre de symétrie	مركز تماثل

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Séance d'essai 100 % gratuite.

Cours en direct sur Google Meet · Petits groupes de 8 élèves max · Programme marocain · moraja3a.app · WhatsApp +212 617 638 536

احجز حصتك التجريبية المجانية على موقع moraja3a.app — افهم، تدرّب، انجح.