MORAJA3A

MATHS · PHYSIQUE-CHIMIE · SVT

COURS · 1ÈRE ANNÉE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · SEMESTRE 1 · ALGÈBRE

Notions de logique

مبادئ في المنطق

Propositions, connecteurs logiques, quantificateurs, lois logiques et les grands types de raisonnement (contraposée, absurde, disjonction des cas, équivalences successives, récurrence) expliqués pas à pas.

Comprends. Entraîne-toi. Réussis.

Rédigé et vérifié par **Mohammed TAOUFIK**, professeur et fondateur de MORAJA3A

NIVEAU
1ère Bac — Sciences Expérimentales (BIOF)

CONTENU
Cours · Exemples · Pièges · 10 exercices + corrigés

PLATEFORME
moraja3a.app

Sommaire

فهرس الدرس

01	Propositions et connecteurs logiques	العبارات والروابط المنطقية
02	Lois logiques	القوانين المنطقية
03	Les quantificateurs	المكممات
04	Les types de raisonnement	أنواع الاستدلال
05	Exercices (10 exercices gradués)	تمارين تطبيقية
06	Corrigés détaillés	التصحيح المفصل
07	Fiche résumé et lexique français–arabe	ملخص ومعجم المصطلحات

POURQUOI CE CHAPITRE EST IMPORTANT

La logique est le **langage** de toutes les mathématiques du lycée. Savoir écrire une négation, utiliser un quantificateur ou choisir le bon type de raisonnement te servira dans chaque chapitre : fonctions, suites, géométrie... C'est aussi ce qui permet de **rédiger correctement** une démonstration au contrôle et à l'examen.

بالعربية 💡

المنطق هو **لغة** الرياضيات. تعلم كتابة النفي واستعمال المكممات واختيار نوع الاستدلال المناسب يساعدك في كل الدروس، ويمكّنك من **تحرير** البراهين بشكل صحيح.

Comment utiliser ce cours

- **Définition** (encadré bleu) : ce qu'il faut savoir par cœur.
- **À retenir** (encadré vert) : la loi, la formule ou la méthode clé.
- **Exemple** (encadré doré) : une application corrigée pas à pas.
- **Piège** (encadré rouge) : l'erreur que font beaucoup d'élèves.
- **بالعربية** : une explication courte en arabe pour bien fixer l'idée.
- **Exercices** : énoncés classés APPLICATION APPROFONDISSEMENT TYPE EXAMEN ; tous les corrigés sont regroupés après les exercices.

1 Propositions et connecteurs logiques

العبارات والروابط المنطقية

DÉFINITION — PROPOSITION

Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui est soit **vrai** (V), soit **faux** (F), jamais les deux à la fois.

- « 7 est un nombre premier » est une proposition vraie.
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est une proposition fausse.
- « $x + 1 = 3$ » n'est **pas** une proposition : sa vérité dépend de x (c'est une **fonction propositionnelle**, notée P(x)).

La négation النفي

DÉFINITION — NÉGATION

La négation d'une proposition P est la proposition notée $\neg P$ (ou $\overline{P}$, « non P »), qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie.

P	¬P
V	F
F	V

EXEMPLES

P : « $3 \geq 5$ » (fausse). $\neg P$: « $3 < 5$ » (vraie).

Q : « $\sqrt{4} = 2$ ». $\neg Q$: « $\sqrt{4} \neq 2$ ».

PIÈGE

La négation de « $x > 2$ » est « $x \leq 2$ », **pas** « $x < 2$ ». Ne pas oublier le cas d'égalité !

Conjonction et disjonction العطف والفصل

DÉFINITION — CONJONCTION « ET »

$P \wedge Q$ (« P et Q ») est vraie **seulement** quand P et Q sont vraies toutes les deux.

DÉFINITION — DISJONCTION « OU »

$P \vee Q$ (« P ou Q ») est vraie quand **au moins une** des deux est vraie. C'est un « ou » **inclusif** : P et Q peuvent être vraies en même temps.

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Implication et équivalence الاستلزام والتكافؤ

DÉFINITION — IMPLICATION

P ⇒ Q (« P implique Q », « si P alors Q ») est la proposition (¬P) ∨ Q. Elle est fausse **uniquement** quand P est vraie et Q fausse.

On dit que P est une **condition suffisante** pour Q, et que Q est une **condition nécessaire** pour P.

DÉFINITION — ÉQUIVALENCE

P ⇔ Q (« P équivaut à Q », « P si et seulement si Q ») est la proposition (P ⇒ Q) ∧ (Q ⇒ P). Elle est vraie quand P et Q ont la **même valeur de vérité**.

P	Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	P ⇔ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

EXEMPLE

« Si x = 2 alors $x^2 = 4$ » est vraie. La **réciproque** « si $x^2 = 4$ alors x = 2 » est fausse (contre-exemple : x = −2). Donc « x = 2 ⇔ $x^2 = 4$ » est fausse.

PIÈGE — L'IMPLICATION N'EST PAS LA RÉCIPROQUE

P ⇒ Q vraie ne dit **rien** sur Q ⇒ P. Une implication dont l'hypothèse P est fausse est toujours vraie : « si 1 = 2 alors 5 > 7 » est vraie !

بالعربية 💡

العبارة نص رياضي إما صحيح أو خاطئ. **العطف** (و) صحيح فقط إذا كانت العبارتان صحيحتين. **الفصل** (أو) صحيح إذا كانت إحداهما على الأقل صحيحة. **الاستلزام** P ⇒ Q خاطئ فقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة.

2 Lois logiques

القوانين المنطقية

DÉFINITION — LOI LOGIQUE

Une **loi logique** (ou tautologie) est une proposition composée qui est **toujours vraie**, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent. On la démontre avec une **table de vérité**.

LES LOIS À CONNAÎTRE

- $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ (double négation)
- **Lois de Morgan** : $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ et $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- **Négation d'une implication** : $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q)$
- **Contraposée** : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- **Transitivité** : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
- **Disjonction des cas** : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
- Distributivité : $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ et $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

DÉMONTRER UNE LOI DE MORGAN PAR UNE TABLE DE VÉRITÉ

On compare les colonnes $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Les deux colonnes sont identiques : la loi est démontrée. ∎

NÉGATION D'UNE PHRASE

Nier « $x > 0$ et $y \leq 3$ » : on obtient « $x \leq 0$ **ou** $y > 3$ ».

Nier « si $x > 1$ alors $x^2 > 1$ » : on obtient « $x > 1$ **et** $x^2 \leq 1$ ».

PIÈGE

La négation d'une implication n'est **pas** une implication : $\neg(P \Rightarrow Q)$ n'est pas « $P \Rightarrow \neg Q$ », c'est « P et $\neg Q$ ».

💡 بالعربية

قانونا مورغان: نفي (P و Q) هو (نفي P أو نفي Q)، ونفي (P أو Q) هو (نفي P و نفي Q). نفي الاستلزام P ⇒ Q هو (P و نفي Q).

3 Les quantificateurs

المكممات

DÉFINITION — QUANTIFICATEUR UNIVERSEL ∀

« ∀x ∈ E, P(x) » se lit « **pour tout** x de E, P(x) ». Elle est vraie si P(x) est vraie pour **chaque** élément x de E.

DÉFINITION — QUANTIFICATEUR EXISTENTIEL ∃

« ∃x ∈ E, P(x) » se lit « **il existe (au moins) un** x de E tel que P(x) ». Elle est vraie si on peut trouver **au moins un** élément qui vérifie P.

« ∃!x ∈ E, P(x) » signifie : il existe un **unique** x de E tel que P(x).

VRAI OU FAUX ?

- ∀x ∈ ℝ, $x^2 \geq 0$: **vraie**.
- ∃x ∈ ℝ, $x^2 = 2$: **vraie** ($x = \sqrt{2}$).
- ∀x ∈ ℝ, $x^2 > x$: **fausse** (contre-exemple $x = 1/2$: $1/4 < 1/2$).
- ∃!x ∈ ℝ, $2x + 3 = 0$: **vraie** ($x = -3/2$).

NÉGATION D'UNE PROPOSITION QUANTIFIÉE

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P(x)$$

On **échange** les quantificateurs ∀ ↔ ∃ et on nie la propriété. L'ensemble E ne change pas.

NIER UNE PROPOSITION À DEUX QUANTIFICATEURS

P : « ∀x ∈ ℝ, ∃y ∈ ℝ, x + y = 0 » (vraie : prendre y = −x).

¬P : « ∃x ∈ ℝ, ∀y ∈ ℝ, x + y ≠ 0 » (donc fausse).

PIÈGE — L'ORDRE DES QUANTIFICATEURS COMPTE

« ∀x ∈ ℝ, ∃y ∈ ℝ, y > x » est **vraie** (pour chaque x, y = x + 1 convient).

« ∃y ∈ ℝ, ∀x ∈ ℝ, y > x » est **fausse** (aucun réel n'est plus grand que tous les réels).

On peut échanger deux quantificateurs **de même nature** (∀∀ ou ∃∃), jamais un ∀ et un ∃.

PIÈGE — UN CONTRE-EXEMPLE SUFFIT

Pour montrer qu'une proposition « ∀x, P(x) » est fausse, **un seul contre-exemple** suffit. Mais pour montrer qu'elle est vraie, des exemples ne suffisent jamais : il faut une démonstration générale.

💡 بالعربية

المكمم الكوني ∀ يعني «مهما كان» أو «لكل»، و**المكمم الوجودي** ∃ يعني «يوجد على الأقل». لنفي عبارة مكممة نبدل ∀ بـ ∃ والعكس، وننفي الخاصية. **ترتيب المكممات مهم**.

4 Les types de raisonnement

أنواع الاستدلال

1. Raisonnement direct et par équivalences successives الاستدلال المباشر والتكافؤات المتتالية

MÉTHODE

Pour montrer $P \Rightarrow Q$: on suppose P vraie et on enchaîne des déductions jusqu'à obtenir Q. Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, on peut aussi écrire une chaîne d'équivalences $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$, en vérifiant que **chaque étape est réversible**.

EXEMPLE

Montrer que pour tous réels positifs a et b : $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$.

$(a + b)/2 \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, ce qui est vrai. Donc l'inégalité est vraie. ∎

2. Raisonnement par contraposée الاستدلال بالمضاد للعكس

MÉTHODE

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (c'est équivalent). Très utile quand Q est une négation, par exemple « $x \neq y$ ».

EXEMPLE

Montrer que pour tous x, y de $[1 ; +\infty[$: $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$.

Contraposée : supposons $x^2 - 2x = y^2 - 2y$. Alors $x^2 - y^2 - 2(x - y) = 0$, soit $(x - y)(x + y - 2) = 0$. Comme $x \geq 1$ et $y \geq 1$, $x + y - 2 \geq 0$, avec égalité seulement si $x = y = 1$. Dans tous les cas $x = y$. On a montré $\neg Q \Rightarrow \neg P$, donc $P \Rightarrow Q$. ∎

3. Raisonnement par l'absurde الاستدلال بالخلف

MÉTHODE

Pour montrer que P est vraie, on suppose que $\neg P$ est vraie et on aboutit à une **contradiction** (une proposition fausse). Donc $\neg P$ est fausse et P est vraie.

EXEMPLE

Montrer que pour tout réel $x > 0$: $\sqrt{x + 1} \neq 1 + x/2$.

Supposons qu'il existe $x > 0$ tel que $\sqrt{x + 1} = 1 + x/2$. En élevant au carré (les deux membres sont positifs) : $x + 1 = 1 + x + x^2/4$, donc $x^2 = 0$ et $x = 0$. Contradiction avec $x > 0$. ∎

4. Raisonnement par disjonction des cas الاستدلال بفصل الحالات

MÉTHODE

On découpe le problème en cas qui couvrent **toutes** les possibilités (par exemple $x \geq 0$ et $x < 0$, ou n pair et n impair), et on démontre le résultat dans chaque cas.

EXEMPLE

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.

Cas 1 : n pair, $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1)$ est pair.

Cas 2 : n impair, $n = 2k+1$. Alors $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ est pair. ∎

5. Raisonnement par contre-exemple الاستدلال بمثال مضاد

MÉTHODE

Pour montrer que « $\forall x \in E, P(x)$ » est fausse, on exhibe **un** élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse.

EXEMPLE

« $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ est premier » est fausse : pour $n = 40$, $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ n'est pas premier.

6. Raisonnement par récurrence الاستدلال بالترجع

PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si :

- **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$;

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

EXEMPLE

Montrer que pour tout $n \geq 1$: $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$.

Initialisation : pour $n = 1$, $1 = 1 \times 2/2$. Vrai.

Hérédité : supposons $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$. Alors
$1 + \ldots + n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n+2)/2$. C'est $P(n+1)$.

Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$. ∎

PIÈGE — LA RÉCURRENCE

Ne jamais oublier l'**initialisation** : sans elle, on peut « démontrer » des choses fausses. Et dans l'hérédité, on **suppose** P(n) pour un n fixé, on ne la démontre pas.

💡 بالعربية

أنواع الاستدلال: **المباشر**، **بالتكافؤات المتتالية**، **بالمضاد للعكس** (نبين ¬P ⇒ ¬Q)، **بالخلف** (نفترض العكس ونصل إلى تناقض)، **بفصل الحالات**، **بمثال مضاد**، و**بالترجع** (تحقق ثم وراثة).

5 Exercices

تمارين — حاول أولاً قبل قراءة التصحيح!

10 exercices classés par difficulté. Les corrigés sont regroupés dans la partie suivante : cherche d'abord seul !

EXERCICE 1 — VALEUR DE VÉRITÉ APPLICATION

Donner la valeur de vérité de chaque proposition, en justifiant :

1. P_1 : « $\sqrt{9} = 3$ et $2 > 5$ »
2. P_2 : « $\pi \in \mathbb{Q}$ ou $-1 < 0$ »
3. P_3 : « $2 + 2 = 5 \Rightarrow 3 < 1$ »
4. P_4 : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ »
5. P_5 : « $\exists x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 4$ »
6. P_6 : « $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x$ »

EXERCICE 2 — NÉGATIONS APPLICATION

Écrire la négation de chaque proposition, puis dire laquelle, de la proposition ou de sa négation, est vraie.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \geq 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1)$

EXERCICE 3 — TABLE DE VÉRITÉ APPLICATION

Soient P et Q deux propositions.

1. Dresser la table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$ et de $(\neg P) \vee Q$. Conclure.
2. Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$ est une loi logique.

EXERCICE 4 — ÉQUIVALENCES SUCCESSIVES APPLICATION

1. Montrer que pour tous réels a et b : $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x/(x^2 + 1) \leq 1/2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ par équivalences successives : $\sqrt{(x + 2)} = x$.

EXERCICE 5 — CONTRAPOSÉE APPROFONDISSEMENT

1. Montrer, par contraposée, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Soient x et y deux réels différents de -1. Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x-1)/(x+1) \neq (y-1)/(y+1)$.

EXERCICE 6 — RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE APPROFONDISSEMENT

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (on admettra que si n^2 est pair alors n est pair).
2. Montrer que pour tout réel x : $\sqrt{(x^2+1)} \neq x$.

EXERCICE 7 — DISJONCTION DES CAS APPROFONDISSEMENT

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n$ est pair.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1| + 2x = 5$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

EXERCICE 8 — RÉCURRENCE — SOMMES APPROFONDISSEMENT

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$:

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$
2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

EXERCICE 9 — RÉCURRENCE — DIVISIBILITÉ ET INÉGALITÉ TYPE EXAMEN

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 4$: $2^n \geq n^2$ … puis vérifier que la propriété est fausse pour $n = 3$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 0$: $(1+a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli).

EXERCICE 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN TYPE EXAMEN

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x/(x^2+1)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq f(x) \leq 1$.
2. Montrer, par l'absurde, que l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution.
3. Montrer, par contraposée, que pour tous $x, y \in [1\,;+\infty[$: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
4. La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ » est-elle vraie ? Justifier.

6 Corrigés détaillés

التصحيح المفصل للتمارين

CORRIGÉ 1 — VALEUR DE VÉRITÉ

1. $\sqrt{9} = 3$ est vraie mais $2 > 5$ est fausse : une conjonction avec une partie fausse est **fausse**.
2. $\pi \notin \mathbb{Q}$ (faux) mais $-1 < 0$ (vrai) : la disjonction est **vraie**.
3. L'hypothèse $2 + 2 = 5$ est fausse : l'implication est **vraie**.
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: **vraie**.
5. $2x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3/2 \notin \mathbb{N}$: **fausse**.
6. Contre-exemple $x = -1$: $|-1| = 1 \neq -1$. **Fausse**.

CORRIGÉ 2 — NÉGATIONS

1. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 < 0$. Or $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$: la proposition est **vraie**.
2. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: pas de racine réelle, la **négation** est vraie.
3. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} > x$. Pour $x = 1/4$: $\sqrt{x} = 1/2 > 1/4$. La **négation** est vraie.
4. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x$. Pour $x = -1$, aucun réel n'a un carré égal à -1 : la **négation** est vraie.
5. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}$, ($x \geq 1$ et $x^2 < 1$). Si $x \geq 1 > 0$, alors $x^2 \geq x \geq 1$: la proposition est **vraie**.

CORRIGÉ 3 — TABLE DE VÉRITÉ

1.

P	Q	¬P	P ⇒ Q	¬P ∨ Q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Les deux colonnes sont identiques : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

2.

P	Q	P ⇒ Q	P ∧ (P ⇒ Q)	[P ∧ (P ⇒ Q)] ⇒ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

La dernière colonne ne contient que des V : c'est une loi logique (le « modus ponens »).

CORRIGÉ 4 — ÉQUIVALENCES SUCCESSIVES

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, vrai. ∎

2. Comme $x^2 + 1 > 0$: $x/(x^2+1) \leq 1/2 \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2$, vrai. ∎

3. Condition : $x + 2 \geq 0$. Une racine carrée est positive, donc il faut aussi $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$: $\sqrt{(x+2)} = x \Leftrightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$. Seul $x = 2 \geq 0$ convient : $S = \{2\}$.

CORRIGÉ 5 — CONTRAPOSÉE

1. Contraposée : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Si $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. La contraposée est vraie, donc la proposition aussi. ∎

2. Montrons la contraposée : supposons $(x-1)/(x+1) = (y-1)/(y+1)$. En faisant le produit en croix : $(x-1)(y+1) = (y-1)(x+1)$, soit $xy + x - y - 1 = xy + y - x - 1$, d'où $2x = 2y$ et $x = y$. Donc $x \neq y \Rightarrow (x-1)/(x+1) \neq (y-1)/(y+1)$. ∎

CORRIGÉ 6 — RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

1. Supposons $\sqrt{2} = p/q$ avec p, q entiers naturels non nuls et la fraction irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2k$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q est pair aussi. p et q sont tous les deux pairs : la fraction n'est pas irréductible. **Contradiction**. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ∎

2. Supposons qu'il existe x tel que $\sqrt{(x^2 + 1)} = x$. Alors $x \geq 0$ et, en élevant au carré, $x^2 + 1 = x^2$, soit $1 = 0$. **Contradiction**. ∎

CORRIGÉ 7 — DISJONCTION DES CAS

1. $n^2 + 3n = n(n + 3)$. Si n est pair, le produit est pair. Si n est impair, $n + 3$ est pair, donc le produit est pair. ∎

2. Cas $x \geq 1$: $x - 1 + 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2$, qui vérifie $x \geq 1$: solution. **Cas** $x < 1$: $1 - x + 2x = 5 \Leftrightarrow x = 4$, qui ne vérifie pas $x < 1$: rejeté. $S = \{2\}$.

3. Cas $x \geq 1$: $x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$. **Cas** $x < 1$: $x^2 - x + 1 - (1 - x) = x^2 \geq 0$. Dans les deux cas l'inégalité est vraie. ∎

CORRIGÉ 8 — RÉCURRENCE — SOMMES

1. Initialisation : $n = 1 : 1 = 1^2$. **Hérédité** : supposons $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Alors $1 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. **Conclusion** : vrai pour tout $n \geq 1$. ∎

2. Initialisation : $n = 1 : 1 = 1 \times 2 \times 3/6$. **Hérédité** : supposons la formule vraie au rang n. Alors

$$\mathbf{1^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6 + (n + 1)^2}$$

$= (n + 1)[n(2n + 1) + 6(n + 1)]/6 = (n + 1)(2n^2 + 7n + 6)/6 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3)/6$, car $(n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 7n + 6$. C'est la formule au rang $n + 1$. ∎

CORRIGÉ 9 — RÉCURRENCE — DIVISIBILITÉ ET INÉGALITÉ

1. $n = 0 : 4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$. Hérédité : si $4^n - 1 = 3k$, alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$. ∎

2. $n = 4 : 2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Hérédité : supposons $2^n \geq n^2$ avec $n \geq 4$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Il suffit de montrer $2n^2 \geq (n + 1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, soit $(n - 1)^2 \geq 2$: vrai car $n - 1 \geq 3$. Donc $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. ∎ Pour $n = 3 : 2^3 = 8 < 9 = 3^2$: d'où l'importance de l'initialisation au bon rang.

3. $n = 0 : 1 \geq 1$. Hérédité : si $(1 + a)^n \geq 1 + na$, en multipliant par $1 + a > 0$: $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$ car $na^2 \geq 0$. ∎

CORRIGÉ 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN

1. $1 - f(x) = (x^2 - 2x + 1)/(x^2 + 1) = (x - 1)^2/(x^2 + 1) \geq 0$ et $1 + f(x) = (x + 1)^2/(x^2 + 1) \geq 0$. Donc $-1 \leq f(x) \leq 1$. ∎

2. Supposons qu'il existe x tel que $f(x) = 2$. D'après 1, $f(x) \leq 1$, donc $2 \leq 1$: **contradiction**. ∎

3. Contraposée : supposons $f(x) = f(y)$. Alors $x(y^2 + 1) = y(x^2 + 1)$, soit $xy^2 + x - yx^2 - y = 0$, soit $xy(y - x) - (y - x) = 0$, donc $(y - x)(xy - 1) = 0$. Comme $x \geq 1$ et $y \geq 1$, $xy \geq 1$ avec $xy = 1$ seulement si $x = y = 1$. Dans tous les cas $x = y$. ∎

4. Fausse. Contre-exemple : $x = 2$ et $y = 1/2$ ($xy = 1$) : $f(2) = 4/5$ et $f(1/2) = 1/(5/4) = 4/5$. Deux réels différents ont la même image.

7 Fiche résumé

ملخص الدرس — للمراجعة السريعة

Quelle méthode pour quelle question ?

Je dois…	Méthode	بالعربية
nier « P et Q », « P ou Q »	Morgan : ¬P ou ¬Q ; ¬P et ¬Q	قانونا مورغان
nier P ⇒ Q	P et ¬Q	نفي الاستلزام
nier ∀x, P(x) / ∃x, P(x)	∃x, ¬P(x) / ∀x, ¬P(x)	نفي عبارة مكممة
montrer P ⇒ Q avec Q négative (≠)	contraposée : ¬Q ⇒ ¬P	المضاد للعكس
montrer une impossibilité, une irrationalité	raisonnement par l'absurde	الاستدلال بالخلف
traiter |x|, parité, signes	disjonction des cas	فصل الحالات
montrer qu'un « ∀ » est faux	un contre-exemple	مثال مضاد
propriété pour tout entier n	récurrence : initialisation + hérédité	الترجع

LES LOIS CLÉS

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

TOP 5 DES ERREURS

- Nier « x > 2 » en « x < 2 » (oubli de l'égalité).
- Confondre une implication et sa réciproque.
- Échanger ∀ et ∃ sans changer le sens.
- Croire qu'un exemple démontre un « pour tout ».
- Oublier l'initialisation d'une récurrence.

Lexique français — arabe معجم المصطلحات

Français	العربية	Français	العربية
Proposition	عبارة	Contraposée	المضاد للعكس
Valeur de vérité	قيمة الحقيقة	Loi logique	قانون منطقي
Négation	نفي	Quantificateur universel	المكمم الكوني
Conjonction	عطف	Quantificateur existentiel	المكمم الوجودي
Disjonction	فصل	Raisonnement par l'absurde	الاستدلال بالخلف
Implication	استلزام	Disjonction des cas	فصل الحالات
Équivalence	تكافؤ	Contre-exemple	مثال مضاد
Réciproque	عكس	Récurrence	الترجع

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Séance d'essai 100 % gratuite.

Cours en direct sur Google Meet · Petits groupes de 8 élèves max · Programme marocain · moraja3a.app · WhatsApp +212 617 638 536

احجز حصتك التجريبية المجانية على موقع moraja3a.app — افهم، تدرّب، انجح.