MORAJA3A

MATHS · PHYSIQUE-CHIMIE · SVT

COURS · 1ÈRE ANNÉE BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES · SEMESTRE 1 · GÉOMÉTRIE

Le produit scalaire et ses applications

الجداء السلمي وتطبيقاته

Définitions du produit scalaire, propriétés, expression analytique dans un repère orthonormé, norme et distance, orthogonalité, vecteur normal, équation de droite, distance d'un point à une droite, étude analytique du cercle et position relative d'une droite et d'un cercle.

Comprends. Entraîne-toi. Réussis.

Rédigé et vérifié par **Mohammed TAOUFIK**, professeur et fondateur de MORAJA3A

NIVEAU
1ère Bac — Sciences Expérimentales (BIOF)

CONTENU
Cours · Exemples · Pièges · 10 exercices + corrigés

PLATEFORME
moraja3a.app

Sommaire

فهرس الدرس

01	Définitions et propriétés	تعاريف وخاصيات
02	Expression analytique dans un repère orthonormé	الصيغة التحليلية في معلم متعامد ممنظم
03	Droites : vecteur normal et distance	المستقيم: المتجهة المنظمية والمسافة
04	Étude analytique du cercle	دراسة تحليلية للدائرة
05	Exercices (10 exercices gradués)	تمارين تطبيقية
06	Corrigés détaillés	التصحيح المفصل
07	Fiche résumé et lexique français–arabe	ملخص ومعجم المصطلحات

POURQUOI CE CHAPITRE EST IMPORTANT

Le produit scalaire transforme la géométrie en **calcul** : avec lui, on calcule des longueurs, des angles, on montre que des droites sont **perpendiculaires**, on écrit l'équation d'un **cercle** ou d'une **tangente**. Il prépare la géométrie dans l'espace (semestre 2) et la 2ème Bac. En physique, c'est le **travail d'une force** : $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$.

بالعربية 💡

الجداء السلمي يحول الهندسة إلى **حساب**: حساب المسافات والزوايا، إثبات **التعامد**، وكتابة معادلة **الدائرة** و**المماس**. وفي الفيزياء يمثل **شغل قوة**.

Comment utiliser ce cours

- **Définition** (encadré bleu) : ce qu'il faut savoir par cœur.
- **À retenir** (encadré vert) : la loi, la formule ou la méthode clé.
- **Exemple** (encadré doré) : une application corrigée pas à pas.
- **Piège** (encadré rouge) : l'erreur que font beaucoup d'élèves.
- **بالعربية** : une explication courte en arabe pour bien fixer l'idée.
- **Exercices** : énoncés classés APPLICATION APPROFONDISSEMENT TYPE EXAMEN ; tous les corrigés sont regroupés après les exercices.

1 Définitions et propriétés

تعاريف وخاصيات

DÉFINITION — PRODUIT SCALAIRE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, avec $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre réel** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$$

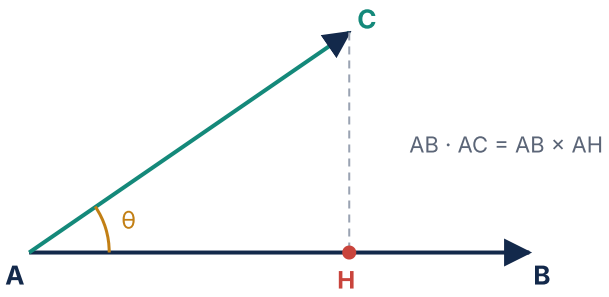
où θ est une mesure de l'angle BAC. Si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

AVEC LA PROJECTION ORTHOGONALE

Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

- $= AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le **même sens** ;
- $= -AB \times AH$ s'ils sont de **sens contraires**.



PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- **Carré scalaire** : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

IDENTITÉS REMARQUABLES ET AUTRES EXPRESSIONS

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

DÉFINITION — ORTHOGONALITÉ

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$. (Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.)

EXEMPLE

ABC triangle avec AB = 4, AC = 3 et ∠BAC = 60°.

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 4 \times 3 \times \cos 60° = 12 \times 1/2 = 6$.

$BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + AB^2 = 9 - 12 + 16 = 13$, donc $BC = \sqrt{13}$.

Applications dans le triangle تطبيقات في المثلث

THÉORÈME D'AL-KASHI ET THÉORÈME DE LA MÉDIANE

Dans un triangle ABC avec a = BC, b = AC, c = AB :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Médiane : si I est le milieu de [BC], alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AI^2 - BC^2/4$$

EXEMPLE

AB = 5, AC = 7, BC = 8. Calculer cos Â et la longueur de la médiane AI.

Al-Kashi : $64 = 49 + 25 - 70\cos\hat{A}$, donc $\cos\hat{A} = 10/70 = 1/7$.

Médiane : $25 + 49 = 2AI^2 + 32$, donc $AI^2 = 21$ et $AI = \sqrt{21}$.

PIÈGE

Le produit scalaire est un **nombre**, pas un vecteur. N'écris jamais $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$, et attention : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne **pas** $\vec{v} = \vec{w}$.

💡 بالعربية

الجداء السلمي لمتجهتين هو عدد حقيقي: $\|u\| \times \|v\| \times \cos\theta$. المتجهتان **متعامدتان** إذا وفقط إذا كان جداؤهما السلمي منعدما. مبرهنة **الكاشي**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

2 Expression analytique dans un repère orthonormé

الصيغة التحليلية في معلم متعامد ممنظم

FORMULES FONDAMENTALES

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$:

$$AB = \sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$$

Et $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTÉ

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\cos \theta = (xx' + yy')/(\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|) \text{ et } \sin \theta = (xy' - x'y)/(\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|)$$

Le nombre $xy' - x'y$ est le **déterminant** $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

EXEMPLE COMPLET

$A(1 ; 2)$, $B(4 ; 3)$, $C(2 ; 5)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

$\vec{AB}(3 ; 1)$, $\vec{AC}(1 ; 3)$, $\vec{BC}(-2 ; 2)$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 + 3 = 6 \neq 0$; $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3)(-2) + (-1)(2) = 4 \neq 0$; $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-1)(2) + (-3)(-2) = 4 \neq 0$.

Aucun angle droit : le triangle n'est **pas** rectangle. Comme $AB = AC = \sqrt{10}$, il est **isocèle en** A, et $\cos \hat{A} = 6/10 = 3/5$.

PIÈGE

Ces formules ne sont valables que dans un repère **orthonormé** (axes perpendiculaires et même unité). Dans un repère quelconque, $xx' + yy'$ n'est pas le produit scalaire.

بالعربية

في معلم **متعامد ممنظم**: $u \cdot v = xx' + yy'$ و $\|u\| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. المتجهتان متعامدتان إذا وفقط إذا كان $xx' + yy' = 0$.

3 Droites : vecteur normal et distance

المستقيم: المتجهة المنظمية والمسافة

DÉFINITION — VECTEUR NORMAL

Un vecteur **non nul** $\vec{n}$ est **normal** à une droite (D) s'il est orthogonal à un vecteur directeur de (D).

ÉQUATION CARTÉSIENNE ET VECTEUR NORMAL

- Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
- Réciproquement, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-b\ ;\ a)$.
- $M \in (D) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, où A est un point de (D).

DROITE PASSANT PAR UN POINT, DE VECTEUR NORMAL DONNÉ

Équation de la droite (D) passant par $A(2\ ;\ -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\ ;\ 4)$.

$M(x\ ;\ y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 2) + 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0.$

DROITES PERPENDICULAIRES

(D) : $ax + by + c = 0$ et (D') : $a'x + b'y + c' = 0$ sont **perpendiculaires** ⇔ leurs vecteurs normaux sont orthogonaux ⇔ $aa' + bb' = 0$.

DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

La distance du point $A(x_0\ ;\ y_0)$ à la droite (D) : $ax + by + c = 0$ est :

$$d(A, (D)) = |ax_0 + by_0 + c| / \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

EXEMPLE

Distance de $A(1\ ;\ 3)$ à (D) : $3x - 4y + 4 = 0$.

$d = |3 - 12 + 4|/\sqrt{(9 + 16)} = |-5|/5 = 1.$

MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

$A(1\ ;\ 1)$ et $B(5\ ;\ 3)$. La médiatrice de [AB] passe par le milieu $I(3\ ;\ 2)$ et a pour vecteur normal $\vec{AB}(4\ ;\ 2)$: $4(x - 3) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 8 = 0.$

بالعربية 💡

المتجهة $\vec{n}(a\ ;\ b)$ **منظمية** على المستقيم $ax + by + c = 0$. **المسافة** بين نقطة $A(x_0\ ;\ y_0)$ والمستقيم هي $|ax_0 + by_0 + c| \ /\ \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

4 Étude analytique du cercle

دراسة تحليلية للدائرة

ÉQUATION D'UN CERCLE

Le cercle (C) de centre Ω(a ; b) et de rayon r > 0 a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

En développant : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

CERCLE DE DIAMÈTRE [AB]

$$M \in (C) \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

ENSEMBLE D'ÉQUATION $X^2 + Y^2 + AX + BY + \Gamma = 0$

On regroupe et on fait apparaître les formes canoniques : $(x + \alpha/2)^2 + (y + \beta/2)^2 = k$ avec $k = (\alpha^2 + \beta^2)/4 - \gamma$.

- $k > 0$: cercle de centre $\Omega(-\alpha/2 ; -\beta/2)$ et de rayon $\sqrt{k}$;
- $k = 0$: un seul point Ω ;
- $k < 0$: l'ensemble vide.

EXEMPLE

Nature de (E) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$. C'est le cercle de centre $\Omega(2 ; -3)$ et de rayon 4.

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

Le cercle de centre Ω(a ; b) et de rayon r admet la représentation paramétrique :

$$x = a + r\cos t \ ; \ y = b + r\sin t \ (t \in \mathbb{R})$$

POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

Soit $d = d(\Omega, (D))$ la distance du centre à la droite :

- $d > r$: la droite et le cercle n'ont **aucun point commun** ;
- $d = r$: la droite est **tangente** au cercle (un point commun) ;
- $d < r$: la droite **coupe** le cercle en deux points.

TANGENTE EN UN POINT

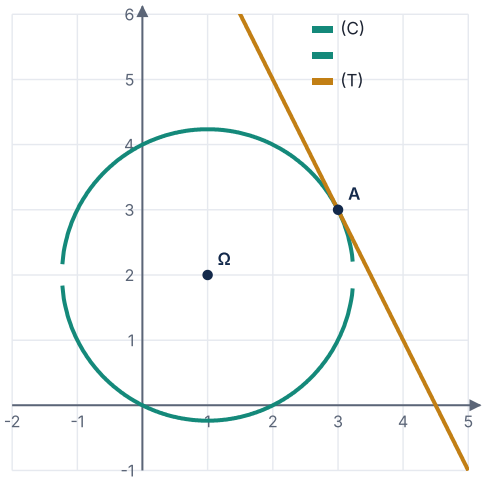
La tangente au cercle (C) de centre Ω en un point A de (C) est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{\Omega A}$:

$$M \in (T) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{\Omega A} = 0$$

TANGENTE

(C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ et A(3 ; 3). Vérifier que A ∈ (C) et écrire la tangente en A.

$(3-1)^2 + (3-2)^2 = 4 + 1 = 5$: A ∈ (C). $\vec{\Omega A}(2\ ;\ 1)$, donc (T) : $2(x-3) + 1(y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0$.



PIÈGE

Avant de conclure qu'une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est un cercle, vérifier que $k > 0$. Et les coefficients de x^2 et y^2 doivent être **égaux** (sinon ce n'est pas un cercle).

بالعربية

معادلة **الدائرة** التي مركزها Ω(a ; b) وشعاعها r هي $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. لدراسة الوضع النسبي لمستقيم ودائرة نقارن **المسافة** d(Ω, D) مع الشعاع r. **المماس** في A عمودي على ΩA.

5 Exercices

تمارين — حاول أولاً قبل قراءة التصحيح!

10 exercices classés par difficulté. Les corrigés sont regroupés dans la partie suivante : cherche d'abord seul !

EXERCICE 1 — CALCULS DE PRODUITS SCALAIRES — APPLICATION

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et I le milieu de [BC]. Calculer :

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
2. $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$
3. $\vec{AI} \cdot \vec{BC}$
4. $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$

EXERCICE 2 — EXPRESSION ANALYTIQUE — APPLICATION

Dans un repère orthonormé, on donne A(−1 ; 2), B(3 ; 4) et C(1 ; −2).

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, AB et AC.
2. En déduire cos(∠BAC) puis une valeur approchée de l'angle.
3. Calculer sin de l'angle orienté $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

EXERCICE 3 — AL-KASHI ET MÉDIANE — APPLICATION

Soit ABC un triangle tel que AB = 6, AC = 4 et BC = 8, et I le milieu de [BC].

1. Calculer cos Â. L'angle Â est-il aigu ou obtus ?
2. Calculer la longueur AI.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 4 — ÉQUATIONS DE DROITES — APPLICATION

Dans un repère orthonormé, A(2 ; 1), B(−2 ; 3), C(4 ; 5).

1. Écrire une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
2. Écrire une équation de la médiatrice de [AB].
3. Calculer la distance de C à la droite (AB), puis l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 5 — RECONNAÎTRE UN CERCLE APPROFONDISSEMENT

Déterminer la nature des ensembles suivants :

1. $(E_1) : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$
2. $(E_2) : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
3. $(E_3) : x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$
4. $(E_4) : 2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 8 = 0$

EXERCICE 6 — CERCLE DÉFINI PAR DES CONDITIONS APPROFONDISSEMENT

Dans un repère orthonormé, A(1 ; 3) et B(5 ; 1).

1. Écrire une équation du cercle (C_1) de diamètre [AB].
2. Écrire une équation du cercle (C_2) de centre $\Omega(2 ; -1)$ tangent à la droite $(D) : 3x + 4y + 8 = 0$.
3. Écrire une équation du cercle (C_3) passant par O(0 ; 0), A et B.

EXERCICE 7 — DROITE ET CERCLE APPROFONDISSEMENT

Soit $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ et, pour un réel m, la droite $(D_m) : 3x - 4y + m = 0$.

1. Déterminer le centre et le rayon de (C).
2. Étudier, selon m, la position relative de (D_m) et (C).
3. Pour m = 0, déterminer les coordonnées des points d'intersection.

EXERCICE 8 — TANGENTES À UN CERCLE APPROFONDISSEMENT

Soit $(C) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

1. Vérifier que A(3 ; 2) appartient à (C) et écrire l'équation de la tangente en A.
2. Déterminer les tangentes à (C) parallèles à la droite $(\Delta) : x + 3y = 0$.

EXERCICE 9 — ENSEMBLES DE POINTS TYPE EXAMEN

Soient A et B deux points tels que AB = 4, et I le milieu de [AB].

1. Montrer que pour tout point M : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - 4$.
2. Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 5$.
3. Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 26$.
4. Déterminer l'ensemble (Γ_3) des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 8$.

EXERCICE 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN TYPE EXAMEN

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(−1 ; 0), B(3 ; 2) et la droite (D) : x − 2y + 6 = 0.

1. Écrire une équation du cercle (C) de diamètre [AB] ; préciser son centre Ω et son rayon.
2. Calculer d(Ω, (D)) et en déduire que (D) est tangente à (C).
3. Déterminer les coordonnées du point de contact T.
4. Soit (D') la droite passant par A et perpendiculaire à (D). Écrire son équation et déterminer son second point d'intersection avec (C).

6 Corrigés détaillés

التصحيح المفصل للتمارين

CORRIGÉ 1 — CALCULS DE PRODUITS SCALAIRES

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 4 \times \cos 60° = 8$.
2. L'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ est $180° - 60° = 120°$: $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 16 \times (-1/2) = -8$.
3. Dans un triangle équilatéral, la médiane (AI) est aussi hauteur : $\vec{AI} \perp \vec{BC}$, donc le produit vaut 0.
4. Le projeté de B sur (AI) est I : $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = AI^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$ (car $AI = 4\sqrt{3}/2$).

CORRIGÉ 2 — EXPRESSION ANALYTIQUE

1. $\vec{AB}(4 ; 2)$, $\vec{AC}(2 ; -4)$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 - 8 = 0$. $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

2. cos = 0 : l'angle vaut 90°. Le triangle ABC est **rectangle isocèle en** A.

3. $\det = 4 \times (-4) - 2 \times 2 = -20$, donc $\sin\theta = -20/20 = -1$: $\theta \equiv -\pi/2\ [2\pi]$.

CORRIGÉ 3 — AL-KASHI ET MÉDIANE

1. $64 = 16 + 36 - 48 \cos \hat{A}$, donc $\cos \hat{A} = -12/48 = -1/4 < 0$: $\hat{A}$ est **obtus**.

2. $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2 \Leftrightarrow 52 = 2AI^2 + 32 \Leftrightarrow AI^2 = 10$, $AI = \sqrt{10}$.

3. $\sin^2 \hat{A} = 1 - 1/16 = 15/16$, $\sin \hat{A} = \sqrt{15}/4$. Aire $= ½ \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = ½ \times 24 \times \sqrt{15}/4 = 3\sqrt{15}$.

CORRIGÉ 4 — ÉQUATIONS DE DROITES

1. Hauteur issue de C : passe par C, normale $\vec{AB}(-4 ; 2)$.
$-4(x - 4) + 2(y - 5) = 0 \Leftrightarrow -4x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$.

2. Milieu I(0 ; 2), normale $\vec{AB}(-4 ; 2)$: $-4x + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$.

3. (AB) : vecteur normal (1 ; 2) (orthogonal à (−4 ; 2)), passe par A : $x + 2y - 4 = 0$.
$d(C, (AB)) = |4 + 10 - 4|/\sqrt{5} = 10/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Aire $= ½ \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$.

CORRIGÉ 5 — RECONNAÎTRE UN CERCLE

1. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1 + 16 - 8 = 9$: cercle de centre (−1 ; 4), rayon 3.
2. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9 + 1 - 10 = 0$: le seul point (3 ; −1).
3. $(x + 2)^2 + y^2 = 4 - 5 = -1 < 0$: **ensemble vide**.
4. On divise par 2 : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$: cercle de centre (1 ; −2), rayon 3.

CORRIGÉ 6 — CERCLE DÉFINI PAR DES CONDITIONS

1. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(5 - x) + (3 - y)(1 - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$, soit $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$: centre $(3 ; 2)$, rayon $\sqrt{5}$.

2. Le rayon est $r = d(\Omega, (D)) = |6 - 4 + 8|/5 = 2$. $(C_2) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

3. On cherche $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. $O : \gamma = 0$. $A : 1 + 9 + \alpha + 3\beta = 0$, soit $\alpha + 3\beta = -10$. $B : 25 + 1 + 5\alpha + \beta = 0$, soit $5\alpha + \beta = -26$. On trouve $\beta = -26 - 5\alpha$, puis $\alpha - 78 - 15\alpha = -10$, $\alpha = -68/14 = -34/7$, $\beta = -26 + 170/7 = -12/7$. $(C_3) : x^2 + y^2 - (34/7)x - (12/7)y = 0$.

CORRIGÉ 7 — DROITE ET CERCLE

1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 + 4 + 20 = 25$: $\Omega(1 ; 2)$, $r = 5$.

2. $d = |3 - 8 + m|/5 = |m - 5|/5$. Tangente $\Leftrightarrow |m - 5| = 25 \Leftrightarrow m = 30$ ou $m = -20$. Sécante $\Leftrightarrow -20 < m < 30$. Extérieure $\Leftrightarrow m < -20$ ou $m > 30$.

3. $m = 0$: $y = 3x/4$. En remplaçant :
$x^2 + 9x^2/16 - 2x - 3x - 20 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 80x - 320 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x - 64 = 0$.
$\Delta = 256 + 1280 = 1536 = 256 \times 6$, $x = (16 \pm 16\sqrt{6})/10 = (8 \pm 8\sqrt{6})/5$, et $y = 3x/4 = (6 \pm 6\sqrt{6})/5$.

CORRIGÉ 8 — TANGENTES À UN CERCLE

1. $1 + 9 = 10$: $A \in (C)$. $\Omega(2 ; -1)$, vecteur $\Omega A(1 ; 3)$: $(T) : (x - 3) + 3(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 9 = 0$.

2. Ces tangentes ont une équation $x + 3y + c = 0$. Condition :
$d(\Omega, (T)) = \sqrt{10} \Leftrightarrow |2 - 3 + c|/\sqrt{10} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |c - 1| = 10 \Leftrightarrow c = 11$ ou $c = -9$. Tangentes :
$x + 3y - 9 = 0$ (celle en A) et $x + 3y + 11 = 0$.

CORRIGÉ 9 — ENSEMBLES DE POINTS

1. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 4$. ∎

2. $MI^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow MI = 3$: cercle de centre I et de rayon 3.

3. Théorème de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + AB^2/2 = 2MI^2 + 8$. Donc $2MI^2 = 18$, $MI = 3$: le même cercle.

4. Soit H le projeté de M sur (AB) : $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AH} \cdot \vec{AB} = 8$ donc $\vec{AH}$ a le sens de $\vec{AB}$ et $AH \times 4 = 8$, $AH = 2$: $H = I$. (Γ_3) est la droite perpendiculaire à (AB) en I : la **médiatrice de** [AB].

CORRIGÉ 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN

1. Ω milieu de [AB] : $\Omega(1\,;\,1)$; $AB = \sqrt{(16 + 4)} = 2\sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$. (C) : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

2. $d = |1 - 2 + 6|/\sqrt{5} = 5/\sqrt{5} = \sqrt{5} = r$: (D) est **tangente** à (C).

3. T est le projeté orthogonal de Ω sur (D). La droite (ΩT) a pour vecteur directeur le vecteur normal $(1\,;\,-2)$: $T(1 + t\,;\,1 - 2t)$. $T \in (D) : 1 + t - 2 + 4t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Donc $T(0\,;\,3)$. Vérification : $1 + 4 = 5$ ✓.

4. (D') a pour vecteur directeur $(1\,;\,-2)$, donc vecteur normal $(2\,;\,1)$: $2(x + 1) + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2$. Dans (C) : $(x - 1)^2 + (-2x - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$. Une seule solution $x = -1$: (D') est **tangente** à (C) en A (pas de second point). Explication : $\vec{\Omega A}(-2\,;\,-1)$ est colinéaire au vecteur normal $(2\,;\,1)$ de (D'), donc (D') est exactement la tangente à (C) en A.

7 Fiche résumé

ملخص الدرس — للمراجعة السريعة

Quelle méthode pour quelle question ?

Je dois…	Méthode	بالعربية
calculer un produit scalaire	cos, projection, ou xx' + yy' (repère orthonormé)	حساب الجداء السلمي
montrer une orthogonalité	produit scalaire nul	التعامد
calculer un angle, une longueur	Al-Kashi, médiane, $\cos\theta = u\cdot v/(\|u\|\|v\|)$	حساب زاوية أو مسافة
équation de droite (point + normale)	$AM \cdot n = 0$	معادلة مستقيم
distance point–droite	$\|ax_0 + by_0 + c\| / \sqrt{(a^2 + b^2)}$	المسافة
nature de $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$	formes canoniques, signe de k	طبيعة مجموعة
position droite / cercle	comparer d(Ω, D) et r	الوضع النسبي
tangente en A	$AM \cdot \Omega A = 0$	المماس

LES FORMULES CLÉS

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta = xx' + yy'$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2$$

$$d = |ax_0 + by_0 + c| / \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

TOP 5 DES ERREURS

- Utiliser xx' + yy' dans un repère non orthonormé.
- Oublier le signe dans la formule de projection.
- Oublier la valeur absolue dans la distance.
- Conclure « cercle » sans vérifier k > 0.
- Confondre vecteur normal (a ; b) et vecteur directeur (−b ; a).

Lexique français — arabe معجم المصطلحات

Français	العربية	Français	العربية
Produit scalaire	الجداء السلمي	Équation cartésienne	معادلة ديكارتية
Norme	منظم	Distance	مسافة
Projeté orthogonal	المسقط العمودي	Médiane	متوسط
Orthogonaux	متعامدان	Hauteur	ارتفاع
Repère orthonormé	معلم متعامد ممنظم	Cercle	دائرة
Déterminant	محددة	Rayon	شعاع
Vecteur normal	متجهة منظمية	Tangente	مماس
Vecteur directeur	متجهة موجهة	Représentation paramétrique	تمثيل بارامتري

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Séance d'essai 100 % gratuite.

Cours en direct sur Google Meet · Petits groupes de 8 élèves max · Programme marocain · moraja3a.app · WhatsApp +212 617 638 536

احجز حصتك التجريبية المجانية على موقع moraja3a.app — افهم، تدرّب، انجح.