MORAJA3A

MATHS · PHYSIQUE-CHIMIE · SVT

COURS · 1ÈRE ANNÉE BAC SCIENCES MATHS · SEMESTRE 2 · GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Le produit vectoriel

الجداء المتجهي

Orientation de l'espace, définition géométrique du produit vectoriel, propriétés, expression analytique dans un repère orthonormé direct, et applications : colinéarité, aire d'un triangle, vecteur normal et équation d'un plan, distance d'un point à une droite, droite d'intersection de deux plans.

Comprends. Entraîne-toi. Réussis.

Rédigé et vérifié par **Mohammed TAOUFIK**, professeur et fondateur de MORAJA3A

NIVEAU
1ère Bac — Sciences Mathématiques (BIOF)

CONTENU
Cours · Exemples · Pièges · 10 exercices + corrigés

PLATEFORME
moraja3a.app

Sommaire

فهرس الدرس

01	Orientation de l'espace	توجيه الفضاء
02	Définition et propriétés	التعريف والخاصيات
03	Expression analytique	الصيغة التحليلية
04	Applications	تطبيقات
05	Exercices (10 exercices gradués)	تمارين تطبيقية
06	Corrigés détaillés	التصحيح المفصل
07	Fiche résumé et lexique français–arabe	ملخص ومعجم المصطلحات

POURQUOI CE CHAPITRE EST IMPORTANT

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre** ; le **produit vectoriel** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un **vecteur**, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Il donne en un seul calcul un **vecteur normal** à un plan, l'**aire** d'un triangle, la **distance** d'un point à une droite, et permet de tester la **colinéarité**. En physique, il décrit le **moment d'une force** $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$ et la **force de Laplace** $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ (2ème Bac).

بالعربية 💡

الجداء المتجهي $u \wedge v$ متجهة عمودية على u و v. يعطي بحساب واحد **متجهة منظمية** على مستوى، **مساحة** مثلث، **مسافة** نقطة عن مستقيم، ويمكن من اختبار **الاستقامية**. في الفيزياء يمثل **عزم قوة** و**قوة لابلاس**.

Comment utiliser ce cours

- **Définition** (encadré bleu) : ce qu'il faut savoir par cœur.
- **À retenir** (encadré vert) : la loi, la formule ou la méthode clé.
- **Exemple** (encadré doré) : une application corrigée pas à pas.
- **Piège** (encadré rouge) : l'erreur que font beaucoup d'élèves.
- **بالعربية** : une explication courte en arabe pour bien fixer l'idée.
- **Exercices** : énoncés classés APPLICATION APPROFONDISSEMENT TYPE EXAMEN ; tous les corrigés sont regroupés après les exercices.

1 Orientation de l'espace

توجيه الفضاء

DÉFINITION — REPÈRE DIRECT

Un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **direct** si un observateur debout sur l'axe (Oz), les pieds en O, la tête dans le sens de $\vec{k}$, regardant dans la direction de $\vec{i}$, a $\vec{j}$ **à sa gauche**.

On peut aussi utiliser la **règle de la main droite** : pouce selon $\vec{i}$, index selon $\vec{j}$, majeur selon $\vec{k}$. Plus généralement, un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires est **direct** s'il est orienté comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct, alors $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ et $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ sont directs (permutation circulaire).
- Échanger deux vecteurs, ou changer l'un d'eux en son opposé, change l'orientation : $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ est indirect.

Dans tout ce chapitre, l'espace est orienté et les repères sont **orthonormés directs**.

💡 بالعربية

المعلم $(O ; i, j, k)$ **مباشر** إذا كان ملاحظ واقف على المحور (Oz) وينظر في اتجاه i يجد j على **يساره**. يمكن استعمال **قاعدة اليد اليمنى**. تبديل متجهتين يغير التوجيه.

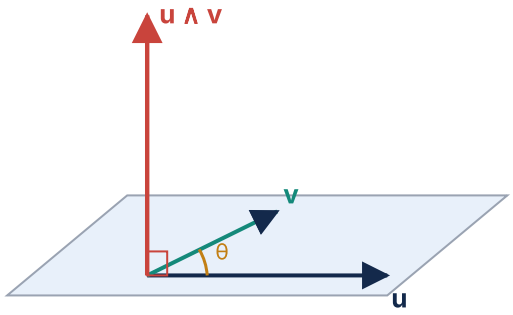
2 Définition et propriétés

التعريف والخاصيات

DÉFINITION — PRODUIT VECTORIEL

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (« u vectoriel v »), est le vecteur défini par :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- sinon, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :
  1. $\vec{w}$ est **orthogonal** à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
  2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un triplet **direct** ;
  3. $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$, où $\theta \in [0 ; \pi]$ est l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



(u, v, u ∧ v) direct ; $\|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\| \sin\theta$

INTERPRÉTATION DE LA NORME

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'**aire du parallélogramme** construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

$$\text{Aire}(ABC) = \tfrac{1}{2} \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel λ :

- **Antisymétrie** : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$; en particulier $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- **Bilinéarité** : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- **Colinéarité** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

LES VECTEURS DE BASE

Dans un repère orthonormé direct :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \; ; \; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \; ; \; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \; ; \; \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \; ; \; \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Moyen mnémotechnique : dans l'ordre circulaire i → j → k → i, le résultat est positif.

EXEMPLE

Calculer $(\vec{i} + \vec{j}) \wedge (\vec{j} - \vec{k})$.

Par bilinéarité : $\vec{i} \wedge \vec{j} - \vec{i} \wedge \vec{k} + \vec{j} \wedge \vec{j} - \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{k} + \vec{j} + \vec{0} - \vec{i}$. Donc le résultat est le vecteur $(-1 ; 1 ; 1)$.

PIÈGES

- Le produit vectoriel n'est **pas commutatif** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- Il n'est **pas associatif** : $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0}$ mais $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un **vecteur**, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un **nombre**.

بالعربية

الجداء المتجهي u ∧ v متجهة: **عمودية** على u و v، و(u, v, u ∧ v) **مباشر**، ومنظمها ‖u‖‖v‖sin θ‖. يكون منعدما إذا وفقط إذا كانت u و v **مستقيميتين**. ‖AB ∧ AC‖/2 هي **مساحة** المثلث ABC. v ∧ u = -u ∧ v.

3 Expression analytique

الصيغة التحليلية

COORDONNÉES DU PRODUIT VECTORIEL

Dans un repère orthonormé direct, si $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

Chaque coordonnée est un **déterminant 2 × 2** obtenu en « cachant » une ligne :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$$

MÉTHODE PRATIQUE DE CALCUL

On écrit les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ en colonnes, on recopie les deux premières lignes en dessous, puis on calcule les « produits en croix » en commençant à la deuxième ligne :

	u	v	calcul	résultat
1re coordonnée	y	y'	y z' − z y'	lignes 2 et 3
2e coordonnée	z	z'	z x' − x z'	lignes 3 et 1
3e coordonnée	x	x'	x y' − y x'	lignes 1 et 2

EXEMPLE

$\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $\vec{v}(3\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \times 2 - (-1) \times 0\ ;\ (-1) \times 3 - 1 \times 2\ ;\ 1 \times 0 - 2 \times 3) = (4\ ;\ -5\ ;\ -6)$.

Vérification (à faire toujours !) : $(4\ ;\ -5\ ;\ -6) \cdot \vec{u} = 4 - 10 + 6 = 0$ et $(4\ ;\ -5\ ;\ -6) \cdot \vec{v} = 12 + 0 - 12 = 0$ ✓.

IDENTITÉ DE LAGRANGE

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$$

(conséquence de $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$).

PIÈGE

La 2e coordonnée est zx' − xz' (et non xz' − zx') : c'est l'erreur la plus fréquente. Vérifier toujours l'orthogonalité du résultat avec les deux vecteurs.

💡 بالعربية

في معلم متعامد ممنظم مباشر: $u \wedge v = (yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$. تحقق دائما أن النتيجة **عمودية** على u و v (جداء سلمي منعدم).

4 Applications
تطبيقات

1. Colinéarité et alignement الاستقامية

CRITÈRE

A, B, C sont **alignés** $\Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$.

2. Aire d'un triangle, d'un parallélogramme مساحة مثلث ومتوازي أضلاع

EXEMPLE

A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3). $\vec{AB}(-1 ; 2 ; 0)$, $\vec{AC}(-1 ; 0 ; 3)$.

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (2 \times 3 - 0 \times 0 ; 0 \times (-1) - (-1) \times 3 ; (-1) \times 0 - 2 \times (-1)) = (6 ; 3 ; 2)$, de norme $\sqrt{(36 + 9 + 4)} = 7$. Aire(ABC) = 7/2.

3. Vecteur normal et équation d'un plan متجهة منظمية ومعادلة مستوى

MÉTHODE

Si A, B, C ne sont pas alignés, $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur **normal** au plan (ABC). Une équation du plan est alors $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

SUITE DE L'EXEMPLE

$\vec{n}(6 ; 3 ; 2)$ et A ∈ (ABC) : 6(x − 1) + 3y + 2z = 0, soit (ABC) : 6x + 3y + 2z − 6 = 0.

4. Distance d'un point à une droite مسافة نقطة عن مستقيم

FORMULE

Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour tout point M :

$$d(M, (D)) = \|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| / \|\vec{u}\|$$

EXEMPLE

(D) passe par A(1 ; 2 ; −1) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2 ; 1 ; 2)$. Distance de M(3 ; 0 ; 1) à (D) ?

$\vec{AM}(2 ; -2 ; 2)$; $\vec{AM} \wedge \vec{u} = ((-2) \times 2 - 2 \times 1 ; 2 \times 2 - 2 \times 2 ; 2 \times 1 - (-2) \times 2) = (-6 ; 0 ; 6)$, de norme $6\sqrt{2}$. $\|\vec{u}\| = 3$. Donc d = $6\sqrt{2}/3 = 2\sqrt{2}$.

5. Représentation paramétrique d'une droite — intersection de deux plans تمثيل بارامتري لمستقيم — تقاطع مستويين

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

La droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que :

$$x = x_A + at \ ; \ y = y_A + bt \ ; \ z = z_A + ct \ (t \in \mathbb{R})$$

DROITE D'INTERSECTION DE DEUX PLANS

Si deux plans de vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont sécants, leur droite d'intersection a pour vecteur directeur $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$ (orthogonal aux deux normales).

EXEMPLE

$(P) : x + y - z = 1$ et $(Q) : 2x - y + z = 2$.

$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = (1 \times 1 - (-1)(-1) \ ; \ (-1) \times 2 - 1 \times 1 \ ; \ 1 \times (-1) - 1 \times 2) = (0 \ ; \ -3 \ ; \ -3)$, donc $\vec{u}(0 ; 1 ; 1)$ dirige la droite. En additionnant les équations : $3x = 3$, $x = 1$, puis $y = z$: le point $(1 ; 0 ; 0)$ convient. Représentation : $x = 1$, $y = t$, $z = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

💡 بالعربية

تطبيقات الجداء المتجهي: **الاستقامية** $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0)$، **مساحة المثلث** $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$، **المتجهة المنظمية** على المستوى (ABC)، **مسافة نقطة عن مستقيم** $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| / \|\vec{u}\|$، و**موجهة** مستقيم تقاطع مستويين $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$.

5 Exercices

تمارين — حاول أولاً قبل قراءة التصحيح!

10 exercices classés par difficulté. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O ; i, j, k). Les corrigés sont regroupés dans la partie suivante : cherche d'abord seul !

EXERCICE 1 — CALCULS DE PRODUITS VECTORIELS — APPLICATION

On donne $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$, $\vec{v}(1 ; 4 ; 0)$ et $\vec{w}(-4 ; 2 ; -6)$.

1. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et vérifier le résultat.
2. En déduire $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $(3\vec{u}) \wedge \vec{v}$.
3. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{w}$. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2 — AVEC LES VECTEURS DE BASE — APPLICATION

Calculer, sans coordonnées, en utilisant uniquement les propriétés :

1. $(2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (\vec{i} + 3\vec{k})$
2. $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \wedge (\vec{i} - \vec{j})$
3. $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{k}$ et $\vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{k})$

EXERCICE 3 — ALIGNEMENT — APPLICATION

On donne A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(4 ; 3 ; −4) et D(0 ; 1 ; 1).

1. Montrer que A, B, C sont alignés.
2. Les points A, B, D sont-ils alignés ? Calculer l'aire du triangle ABD.

EXERCICE 4 — PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS — APPLICATION

Soient A(1 ; 1 ; 0), B(2 ; 0 ; 1) et C(0 ; 2 ; 2).

1. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. En déduire que A, B, C définissent un plan.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 5 — DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE — APPROFONDISSEMENT

Soit (D) la droite passant par A(0 ; 1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2 ; -2)$.

1. Donner une représentation paramétrique de (D).
2. Calculer la distance du point M(3 ; 1 ; 0) à la droite (D).
3. Retrouver ce résultat en déterminant le projeté orthogonal H de M sur (D).

EXERCICE 6 — INTERSECTION DE DEUX PLANS APPROFONDISSEMENT

Soient (P) : $2x + y - z + 1 = 0$ et (Q) : $x - y + 2z - 4 = 0$.

1. Montrer que (P) et (Q) sont sécants.
2. Déterminer un vecteur directeur de leur droite d'intersection (Δ), puis une représentation paramétrique de (Δ).

EXERCICE 7 — IDENTITÉS APPROFONDISSEMENT

1. Démontrer l'identité de Lagrange : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$.
2. Montrer que $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = -2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
3. En déduire que l'aire d'un parallélogramme est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur ses diagonales.

EXERCICE 8 — TÉTRAÈDRE APPROFONDISSEMENT

Soient A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et O l'origine.

1. Calculer l'aire du triangle ABC et une équation du plan (ABC) (voir le cours).
2. Calculer la distance de O au plan (ABC).
3. En déduire le volume du tétraèdre OABC, et vérifier avec la formule $V = OA \times OB \times OC/6$.

EXERCICE 9 — POINT SUR UNE DROITE À DISTANCE DONNÉE TYPE EXAMEN

Soit (D) la droite passant par A(1 ; 0 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 1 ; 0)$, et le point M(1 ; 2 ; 3).

1. Calculer d(M, (D)).
2. Déterminer les points N de (D) tels que l'aire du triangle AMN soit égale à 3.

EXERCICE 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN TYPE EXAMEN

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On utilise le repère orthonormé direct $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées de B, D, E, G.
2. Calculer $\vec{BD} \wedge \vec{BE}$. En déduire l'aire du triangle BDE et une équation du plan (BDE).
3. Calculer la distance de G au plan (BDE).
4. Calculer la distance de G à la droite (BD).
5. Montrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

6 Corrigés détaillés

التصحيح المفصل للتمارين

CORRIGÉ 1 — CALCULS DE PRODUITS VECTORIELS

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = ((-1) \times 0 - 3 \times 4 ; 3 \times 1 - 2 \times 0 ; 2 \times 4 - (-1) \times 1) = (-12 ; 3 ; 9)$. Vérification : $(-12 ; 3 ; 9) \cdot \vec{u} = -24 - 3 + 27 = 0$ et $\cdot \vec{v} = -12 + 12 + 0 = 0$ ✓.

2. $\vec{v} \wedge \vec{u} = (12 ; -3 ; -9)$; $(3\vec{u}) \wedge \vec{v} = 3(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (-36 ; 9 ; 27)$.

3. $\vec{w} = -2\vec{u}$: $\vec{u} \wedge \vec{w} = -2(\vec{u} \wedge \vec{u}) = \vec{0}$. Les vecteurs sont colinéaires.

CORRIGÉ 2 — AVEC LES VECTEURS DE BASE

1. $2\vec{i} \wedge \vec{i} + 6\vec{i} \wedge \vec{k} - \vec{j} \wedge \vec{i} - 3\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{0} - 6\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i}$, soit $(-3 ; -6 ; 1)$.

2. $\vec{i} \wedge \vec{i} - \vec{i} \wedge \vec{j} + \vec{j} \wedge \vec{i} - \vec{j} \wedge \vec{j} + \vec{k} \wedge \vec{i} - \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{k} - \vec{k} + \vec{j} + \vec{i}$, soit $(1 ; 1 ; -2)$.

3. $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{k} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$; $\vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{k}) = \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$. (Ici égaux, mais ce n'est pas vrai en général.)

CORRIGÉ 3 — ALIGNEMENT

1. $\vec{AB}(1 ; 1 ; -2)$ et $\vec{AC}(3 ; 3 ; -6)$:
$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1 \times (-6) - (-2) \times 3 ; (-2) \times 3 - 1 \times (-6) ; 1 \times 3 - 1 \times 3) = (0 ; 0 ; 0)$: alignés.

2. $\vec{AD}(-1 ; 1 ; -1)$: $\vec{AB} \wedge \vec{AD} = (1 \times (-1) - (-2) \times 1 ; (-2)(-1) - 1 \times (-1) ; 1 \times 1 - 1 \times (-1)) = (1 ; 3 ; 2) \neq \vec{0}$: non alignés. Aire = $\frac{1}{2}\sqrt{(1 + 9 + 4)} = \sqrt{14}/2$.

CORRIGÉ 4 — PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

1. $\vec{AB}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{AC}(-1 ; 1 ; 2)$:
$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = ((-1) \times 2 - 1 \times 1 ; 1 \times (-1) - 1 \times 2 ; 1 \times 1 - (-1)(-1)) = (-3 ; -3 ; 0) \neq \vec{0}$: les points ne sont pas alignés.

2. Vecteur normal $(1 ; 1 ; 0)$: $x + y + d = 0$ avec A : $d = -2$. (ABC) : $x + y - 2 = 0$.

3. Aire = $\frac{1}{2}\|(-3 ; -3 ; 0)\| = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$.

CORRIGÉ 5 — DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

1. $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 - 2t$ $(t \in \mathbb{R})$.

2. $\vec{AM}(3 ; 0 ; -2)$; $\vec{AM} \wedge \vec{u} = (0 \times (-2) - (-2) \times 2 ; (-2) \times 1 - 3 \times (-2) ; 3 \times 2 - 0 \times 1) = (4 ; 4 ; 6)$, de norme $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$. $\|\vec{u}\| = 3$. $d = 2\sqrt{17}/3$.

3. $H(t ; 1 + 2t ; 2 - 2t)$ avec $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$: $(t - 3) + 2(2t) - 2(2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow 9t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 7/9$. Donc $H(7/9 ; 23/9 ; 4/9)$ et $\vec{MH}(-20/9 ; 14/9 ; 4/9)$. $MH^2 = (400 + 196 + 16)/81 = 612/81 = 68/9$, donc $MH = \sqrt{68}/3 = 2\sqrt{17}/3$ ✓ : on retrouve le résultat du 2.

CORRIGÉ 6 — INTERSECTION DE DEUX PLANS

1. $n_1(2\,;1\,;-1)$ et $n_2(1\,;-1\,;2)$ ne sont pas colinéaires (leur produit vectoriel est non nul ci-dessous) : les plans sont sécants.

2. $n_1 \wedge n_2 = (1\times 2-(-1)(-1)\,;(-1)\times 1-2\times 2\,;2\times(-1)-1\times 1) = (1\,;-5\,;-3)$. Un point : avec $z=0$, $2x+y=-1$ et $x-y=4$, donc $3x=3$, $x=1$, $y=-3$: $A(1\,;-3\,;0)$. (Δ) : $x=1+t$, $y=-3-5t$, $z=-3t$. Vérification : $2(1+t)+(-3-5t)+3t+1=0$ ✓ et $(1+t)-(-3-5t)-6t-4=0$ ✓.

CORRIGÉ 7 — IDENTITÉS

1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires, $\theta=0$ ou π : les deux membres valent $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$. Sinon : $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\sin^2\theta+\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos^2\theta=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$. ∎

2. $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\wedge\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{u}-\vec{v}\wedge\vec{v}=-\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\wedge\vec{v}=-2(\vec{u}\wedge\vec{v})$. ∎

3. Le parallélogramme ABCD construit sur $\vec{u}=\vec{AB}$, $\vec{v}=\vec{AD}$ a pour diagonales $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ (au signe près). L'aire du parallélogramme construit sur les diagonales vaut $\|(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})\|=2\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$, soit le double. ∎

CORRIGÉ 8 — TÉTRAÈDRE

1. Aire = 7/2 ; (ABC) : $6x+3y+2z-6=0$.

2. $d=|-6|/\sqrt{(36+9+4)}=6/7$.

3. $V=(1/3)\times\text{aire(ABC)}\times d=(1/3)\times(7/2)\times(6/7)=1$. Vérification : OABC a trois arêtes deux à deux orthogonales en O : $V=(1\times 2\times 3)/6=1$ ✓.

CORRIGÉ 9 — POINT SUR UNE DROITE À DISTANCE DONNÉE

1. $\vec{AM}(0\,;2\,;2)$; $\vec{AM}\wedge\vec{u}=(2\times 0-2\times 1\,;2\times 1-0\times 0\,;0\times 1-2\times 1)=(-2\,;2\,;-2)$, norme $2\sqrt{3}$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$. $d=2\sqrt{3}/\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

2. $N\in(D)$: $\vec{AN}=t\vec{u}$. $\text{Aire(AMN)}=\tfrac{1}{2}\|\vec{AM}\wedge t\vec{u}\|=\tfrac{1}{2}|t|\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}|t|$. Aire $=3\Leftrightarrow|t|=\sqrt{3}$. Donc $N(1+\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,;1)$ ou $N(1-\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\,;1)$. (Autre méthode : aire $=\tfrac{1}{2}\times AN\times d(M,(D))=\tfrac{1}{2}\times|t|\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}|t|$ ✓.)

CORRIGÉ 10 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN

1. B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1).

2. $\vec{BD}(-1 ; 1 ; 0)$, $\vec{BE}(-1 ; 0 ; 1)$:
$\vec{BD} \wedge \vec{BE} = (1 \times 1 - 0 \times 0 ; 0 \times (-1) - (-1) \times 1 ; (-1) \times 0 - 1 \times (-1)) = (1 ; 1 ; 1)$. Aire(BDE) = $\sqrt{3}/2$ (c'est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$: $(\sqrt{3}/4) \times 2 = \sqrt{3}/2$ ✓). Plan : $x + y + z - 1 = 0$.

3. $d(G, (BDE)) = |1 + 1 + 1 - 1|/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$.

4. $\vec{BG}(0 ; 1 ; 1)$, $\vec{BG} \wedge \vec{BD} = (1 \times 0 - 1 \times 1 ; 1 \times (-1) - 0 \times 0 ; 0 \times 1 - 1 \times (-1)) = (-1 ; -1 ; 1)$, norme $\sqrt{3}$; BD = $\sqrt{2}$. d = $\sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}/2$.

5. $\vec{AG}(1 ; 1 ; 1)$ est colinéaire au vecteur normal (1 ; 1 ; 1) de (BDE) : (AG) $\perp$ (BDE).

7 Fiche résumé

ملخص الدرس — للمراجعة السريعة

Quelle méthode pour quelle question ?

Je dois…	Méthode	بالعربية
calculer u ∧ v	(yz' − zy' ; zx' − xz' ; xy' − yx'), puis vérifier l'orthogonalité	حساب الجداء المتجهي
montrer un alignement	AB ∧ AC = 0	الاستقامية
aire d'un triangle	½ ‖AB ∧ AC‖	مساحة مثلث
équation du plan (ABC)	n = AB ∧ AC, puis AM · n = 0	معادلة مستوى
distance de M à (D)	‖AM ∧ u‖ / ‖u‖	مسافة نقطة عن مستقيم
droite d'intersection de deux plans	direction $n_1 \wedge n_2$, plus un point commun	تقاطع مستويين

LES FORMULES CLÉS

$$u \wedge v \perp u \text{ et } v \text{ ; } (u, v, u \wedge v) \text{ direct}$$

$$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta$$

$$v \wedge u = -u \wedge v$$

$$i \wedge j = k \text{ ; } j \wedge k = i \text{ ; } k \wedge i = j$$

$$\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$$

TOP 5 DES ERREURS

- Se tromper de signe sur la 2e coordonnée.
- Oublier que u ∧ v = −v ∧ u.
- Oublier le ½ dans l'aire du triangle.
- Confondre produit scalaire (nombre) et vectoriel (vecteur).
- Ne pas vérifier l'orthogonalité du résultat.

Lexique français — arabe معجم المصطلحات

Français	العربية	Français	العربية
Produit vectoriel	الجداء المتجهي	Déterminant	محددة
Repère direct	معلم مباشر	Aire	مساحة
Orientation	توجيه	Parallélogramme	متوازي الأضلاع
Règle de la main droite	قاعدة اليد اليمنى	Vecteur normal	متجهة منظمية
Colinéaires	مستقيميتان	Vecteur directeur	متجهة موجهة
Orthogonal	عمودي	Représentation paramétrique	تمثيل بارامتري
Antisymétrie	تخالف	Distance	مسافة
Bilinéarité	ثنائية الخطية	Tétraèdre	رباعي الأوجه

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Séance d'essai 100 % gratuite.

Cours en direct sur Google Meet · Petits groupes de 8 élèves max · Programme marocain · moraja3a.app · WhatsApp +212 617 638 536

احجز حصتك التجريبية المجانية على موقع moraja3a.app — افهم، تدرّب، انجح.