MORAJA3A

MATHS · PHYSIQUE-CHIMIE · SVT

COURS · 1ÈRE ANNÉE BAC SCIENCES MATHS · SEMESTRE 1 · ALGÈBRE

Ensembles et applications

المجموعات والتطبيقات

Ensembles, inclusion, ensemble des parties, intersection, réunion, complémentaire, différence, lois de Morgan, produit cartésien ; puis applications, image directe et réciproque, injection, surjection, bijection, application réciproque et composition, expliqués pas à pas.

Comprends. Entraîne-toi. Réussis.

Rédigé et vérifié par **Mohammed TAOUFIK**, professeur et fondateur de MORAJA3A

NIVEAU
1ère Bac — Sciences Mathématiques (BIOF)

CONTENU
Cours · Exemples · Pièges · 18 exercices + corrigés

PLATEFORME
moraja3a.app

Sommaire

فهرس الدرس

01	Ensembles, éléments et inclusion	المجموعات والعناصر والتضمين
02	Opérations sur les ensembles	العمليات على المجموعات
03	Notion d'application	مفهوم التطبيق
04	Image directe et image réciproque d'une partie	الصورة المباشرة والصورة العكسية لجزء
05	Injection, surjection, bijection	التطبيق التباييني والشمولي والتقابلي
06	Application réciproque d'une bijection	التقابل العكسي
07	Composition d'applications	تركيب التطبيقات
08	Exercices (18 exercices gradués)	تمارين تطبيقية
09	Corrigés détaillés	التصحيح المفصل
10	Fiche résumé et lexique français–arabe	ملخص ومعجم المصطلحات

POURQUOI CE CHAPITRE EST IMPORTANT

Les **ensembles** et les **applications** forment le langage de base de toutes les mathématiques. On les utilise pour écrire des ensembles de solutions, décrire des ensembles de points en géométrie, définir les fonctions, les suites et les transformations du plan. Savoir démontrer une inclusion ou une égalité d'ensembles, et prouver qu'une application est **injective**, **surjective** ou **bijective**, est une compétence centrale en Sciences Maths, et elle prépare les fonctions réciproques de 2ème Bac.

💡 **بالعربية**

المجموعات و**التطبيقات** هي اللغة الأساسية للرياضيات: مجموعات الحلول، مجموعات النقط، الدوال، المتتاليات والتحويلات. إثبات تضمين أو تساوي مجموعتين، وإثبات أن تطبيقا **تباييني** أو **شمولي** أو **تقابلي**، مهارة أساسية في شعبة العلوم الرياضية.

Comment utiliser ce cours

- **Définition** (encadré bleu) : ce qu'il faut savoir par cœur.
- **À retenir** (encadré vert) : la loi, la formule ou la méthode clé.
- **Exemple** (encadré doré) : une application corrigée pas à pas.
- **Piège** (encadré rouge) : l'erreur que font beaucoup d'élèves.
- **بالعربية** : une explication courte en arabe pour bien fixer l'idée.

- **Exercices** : énoncés classés APPLICATION APPROFONDISSEMENT TYPE EXAMEN ; tous les corrigés sont regroupés après les exercices.

1 Ensembles, éléments et inclusion

المجموعات والعناصر والتضمين

DÉFINITION — ENSEMBLE

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés ses **éléments**. On note $x \in E$ (« x appartient à E ») et $x \notin E$ dans le cas contraire. L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'**ensemble vide**, noté $\varnothing$.

DEUX FAÇONS DE DÉCRIRE UN ENSEMBLE

- **En extension** : on donne la liste de ses éléments. Exemple : $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$ (diviseurs positifs de 6).
- **En compréhension** : on donne une propriété caractéristique. Exemple : $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \leq 0\} = [1 ; 2]$.

Un ensemble à un seul élément $\{a\}$ s'appelle un **singleton** ; un ensemble $\{a ; b\}$ (avec $a \neq b$) est une **paire**.

DÉFINITION — INCLUSION

On dit que A est **inclus** dans B (ou que A est une **partie** de B), et on note $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B :

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Pour tout ensemble E : $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$.

DÉFINITION — ÉGALITÉ DE DEUX ENSEMBLES

$A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$ (raisonnement par **double inclusion**).

EXEMPLE — DÉMONTRER UNE INCLUSION

Soit $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$. Montrer que $A \subset B$.

Soit $x \in A$: $x^2 \leq 1$, donc $|x| \leq 1$, donc $x \leq 1$: $x \in B$. ∎ L'inclusion est stricte : $-5 \in B$ mais $-5 \notin A$.

DÉFINITION — ENSEMBLE DES PARTIES

L'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathscr{P}(E)$:

$$X \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$$

Si E a n éléments, $\mathscr{P}(E)$ en a 2^n.

EXEMPLE

E = {a ; b ; c} : $\mathscr{P}$(E) = {ø ; {a} ; {b} ; {c} ; {a ; b} ; {a ; c} ; {b ; c} ; E}, soit $2^3 = 8$ parties.

PIÈGE — ∈ OU ⊂ ?

∈ relie un **élément** à un ensemble ; ⊂ relie deux **ensembles**. Avec E = {1 ; 2} : 1 ∈ E, {1} ⊂ E, {1} ∈ $\mathscr{P}$(E), mais « 1 ⊂ E » n'a pas de sens.

💡 بالعربية

المجموعة تجمع عناصر. A **ضمن** B (A ⊂ B) إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B. A = B إذا وفقط إذا كان A ⊂ B و B ⊂ A. $\mathscr{P}$(E) هي **مجموعة أجزاء** E، وعدد عناصرها 2^n.

2 Opérations sur les ensembles

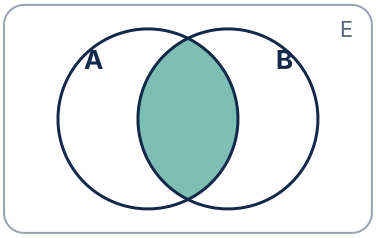
العمليات على المجموعات

DÉFINITION — INTERSECTION, RÉUNION, DIFFÉRENCE, COMPLÉMENTAIRE

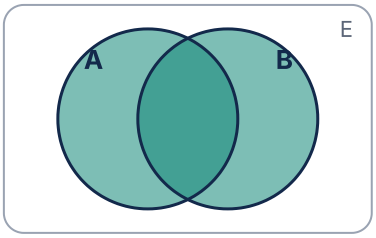
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- **Intersection** : $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **Réunion** : $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- **Différence** : $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ (« A privé de B »).
- **Complémentaire** de A dans E : $C_E A = \bar{A} = \{x \in E / x \notin A\} = E \setminus A$.

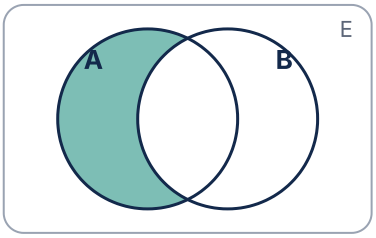
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.



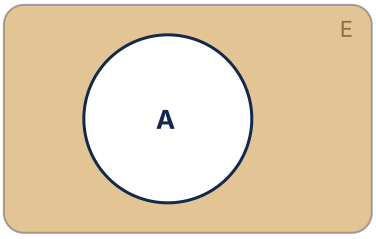
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$C_E A$

EXEMPLE

$E = \mathbb{R}$, $A = [-1 ; 3]$, $B =]2 ; 5]$.

$A \cap B =]2 ; 3]$; $A \cup B = [-1 ; 5]$; $A \setminus B = [-1 ; 2]$; $B \setminus A =]3 ; 5]$; $C_{\mathbb{R}} A =]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

PROPRIÉTÉS

- $\cap$ et $\cup$ sont **commutatives** et **associatives**.
- **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$; $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
- $C_E(C_E A) = A$; $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.

LOIS DE MORGAN

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \quad C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Elles traduisent, pour les ensembles, les lois de Morgan de la logique : la négation de « et » est « ou », et inversement.

DÉMONSTRATION D'UNE LOI DE MORGAN

Pour $x \in E$: $x \in C_E(A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \text{ et } x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \Leftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B$. ∎

DÉFINITION — PRODUIT CARTÉSIEN

Le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble des **couples** (a ; b) avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B = \{(a ; b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$$

On note $A^2 = A \times A$ (par exemple $\mathbb{R}^2$, le plan muni d'un repère). Deux couples sont égaux si $(a ; b) = (a' ; b') \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$. Si A a n éléments et B en a p, $A \times B$ en a np.

EXEMPLE

$A = \{1 ; 2\}$, $B = \{x ; y ; z\}$: $A \times B = \{(1 ; x) ; (1 ; y) ; (1 ; z) ; (2 ; x) ; (2 ; y) ; (2 ; z)\}$ (6 couples). Attention : $(1 ; x) \neq (x ; 1)$ et $A \times B \neq B \times A$ en général.

PIÈGE

« $x \in A \cup B$ » ne veut pas dire que x est dans un seul des deux : le « ou » est **inclusif**. Et le complémentaire dépend de l'ensemble de référence E : toujours le préciser.

💡 بالعربية

التقاطع $A \cap B$: العناصر المشتركة. **الاتحاد** $A \cup B$: العناصر التي تنتمي إلى A أو B. **الفرق** $A \setminus B$ و**المتمم** $C_E A$. **قانونا مورغان**: متمم التقاطع هو اتحاد المتممين والعكس. **الجداء الديكارتي** $A \times B$ مجموعة الأزواج.

3 Notion d'application

مفهوم التطبيق

DÉFINITION — APPLICATION

Soient E et F deux ensembles non vides. Une **application** f de E dans F est une relation qui associe à **chaque** élément x de E **un et un seul** élément y de F, noté f(x).

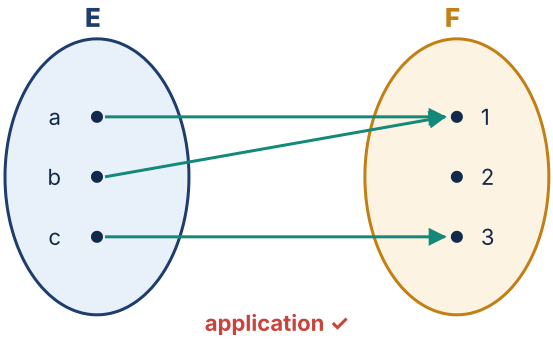
$$f : E \to F,\ x \mapsto f(x)$$

- E est l'**ensemble de départ**, F l'**ensemble d'arrivée** ;
- $y = f(x)$ est l'**image** de x par f ;
- x est **un antécédent** de y par f.

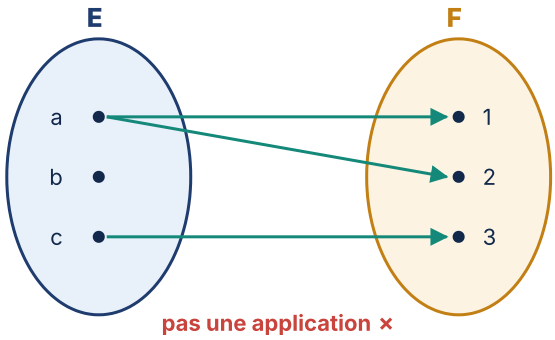
LES DEUX CONDITIONS À VÉRIFIER

1. **Existence** : tout élément de E a une image (aucun élément de E « sans flèche »).
2. **Unicité** : cette image est unique (jamais deux flèches partant du même élément).

En revanche, un élément de F peut avoir **zéro, un ou plusieurs** antécédents.



application ✓



pas une application ×

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 3x$ est une application.
- $x \mapsto 1/x$ n'est **pas** une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: 0 n'a pas d'image. C'est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais c'est une application de $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- La relation « x est associé à y si $y^2 = x$ » de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ n'est **pas** une application : 4 est associé à 2 et à −2 (unicité non vérifiée).

DÉFINITION — APPLICATIONS PARTICULIÈRES

- L'**identité** de E : $Id_E : E \to E,\ x \mapsto x$.
- Une **application constante** : $x \mapsto c$ (c fixé dans F).
- Une **suite** réelle est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION — ÉGALITÉ DE DEUX APPLICATIONS

Deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ sont **égales** si elles ont le **même ensemble de départ** ($E = E'$), le **même ensemble d'arrivée** ($F = F'$) et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de E.

EXEMPLE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{(x^2)}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ sont égales.

En revanche, $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2/x$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ne sont **pas** égales, bien que $u(x) = v(x)$ pour tout $x \neq 0$: leurs ensembles de départ sont différents (v est un prolongement de u).

DÉFINITION — RESTRICTION ET PROLONGEMENT

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. La **restriction** de f à A est l'application $f_{|A} : A \to F$, $x \mapsto f(x)$.

Inversement, si $E \subset E'$, une application $g : E' \to F$ telle que $g_{|E} = f$ est un **prolongement** de f à E'.

EXEMPLE DE PROLONGEMENT

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)/x$. L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$ est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

PIÈGE

Une application, ce n'est pas seulement une formule : c'est une formule **avec** un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Changer E ou F change l'application (et souvent ses propriétés).

💡 بالعربية

التطبيق f من E نحو F يربط كل عنصر x من E بعنصر **وحيد** $f(x)$ من F. $f(x)$ هي **صورة** x، و x **سابق** لـ $f(x)$. يمكن لعنصر من F أن يكون له سابق واحد أو عدة سوابق أو لا يكون له أي سابق.

4 Image directe et image réciproque d'une partie

الصورة المباشرة والصورة العكسية لجزء

DÉFINITION — IMAGE DIRECTE

Soit f : E → F et A ⊂ E. L'**image directe** de A par f est l'ensemble des images des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$$

DÉFINITION — IMAGE RÉCIPROQUE

Soit B ⊂ F. L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :

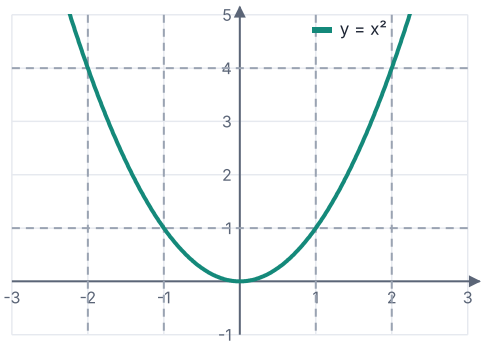
$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

EXEMPLE AVEC F(X) = X²

Soit f : ℝ → ℝ, x ↦ x².

- f([1 ; 3]) = [1 ; 9] (f est croissante sur [1 ; 3]).
- f([−2 ; 1]) = [0 ; 4] (attention : 0 = f(0) et 4 = f(−2) ; on utilise les variations).
- $f^{-1}([1 ; 4]) = \{x / 1 \leq x^2 \leq 4\} = [-2 ; -1] \cup [1 ; 2]$.
- $f^{-1}(\{9\}) = \{-3 ; 3\}$; $f^{-1}(]-\infty ; 0[) = \varnothing$.



MÉTHODE

- Pour f(A) avec une fonction numérique : dresser le **tableau de variations** de f sur A et lire l'ensemble des valeurs prises.
- Pour $f^{-1}(B)$: **résoudre** l'inéquation (ou l'équation) $f(x) \in B$ dans E.

PROPRIÉTÉS

Pour A, A' ⊂ E et B, B' ⊂ F :

- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$; $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (inclusion seulement !) ;
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$; $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$;
- $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

PIÈGE — LA NOTATION $F^{-1}(B)$

La notation $f^{-1}(B)$ existe pour **toute** application, même non bijective. Elle ne signifie pas que f a une réciproque. Et $f^{-1}(B)$ peut être vide.

بالعربية

الصورة المباشرة f(A) هي مجموعة صور عناصر A. **الصورة العكسية** $f^{-1}(B)$ هي مجموعة عناصر E التي صورها تنتمي إلى B. لحساب f(A) نستعمل جدول التغيرات، ولحساب $f^{-1}(B)$ نحل المتراجحة $f(x) \in B$.

5 Injection, surjection, bijection

التطبيق التباييني والشمولي والتقابلي

DÉFINITION — INJECTION

f : E → F est **injective** si deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes :

$$\forall (a, b) \in E^2,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

(forme équivalente, par contraposée : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$). Autrement dit : **tout élément de F a au plus un antécédent**.

DÉFINITION — SURJECTION

f : E → F est **surjective** si tout élément de F a **au moins un** antécédent :

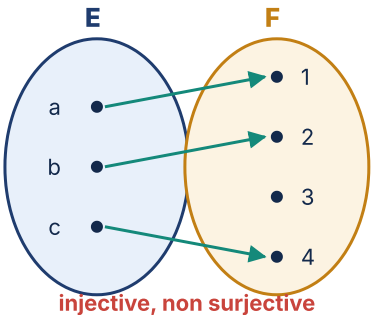
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

Cela équivaut à f(E) = F.

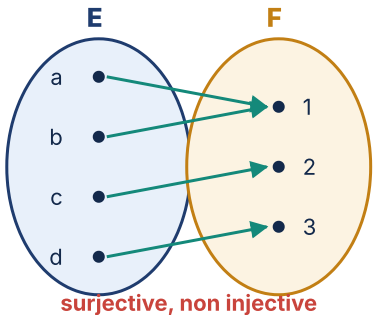
DÉFINITION — BIJECTION

f : E → F est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a **exactement un** antécédent :

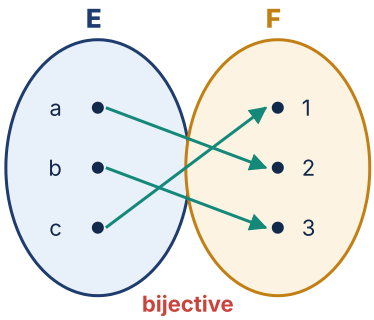
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$$



injective, non surjective



surjective, non injective



bijective

MÉTHODES

Pour montrer que f est…	Méthode
injective	supposer f(a) = f(b) et en déduire a = b
non injective	trouver a ≠ b avec f(a) = f(b)
surjective	prendre y ∈ F quelconque, résoudre f(x) = y et vérifier que la solution x est dans E
non surjective	trouver un y ∈ F sans antécédent
bijective	résoudre f(x) = y : pour tout y ∈ F, une unique solution x ∈ E

EXEMPLE 1

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 5$.

Injective : f(a) = f(b) ⇒ 3a − 5 = 3b − 5 ⇒ a = b.

Surjective : soit y ∈ $\mathbb{R}$; f(x) = y ⇔ x = (y + 5)/3 ∈ $\mathbb{R}$. Tout y a un antécédent (unique) : f est **bijective**.

EXEMPLE 2

g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

g(−2) = g(2) avec −2 ≠ 2 : **non injective**. −1 n'a pas d'antécédent (un carré est positif) : **non surjective**.

Mais la restriction h : [0 ; +∞[→ [0 ; +∞[, $x \mapsto x^2$ est **bijective** : pour y ≥ 0, l'équation $x^2 = y$ a une unique solution positive $x = \sqrt{y}$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE (FONCTION NUMÉRIQUE)

Soit f : E → F avec E, F ⊂ $\mathbb{R}$. On trace les droites horizontales y = k pour k ∈ F :

- f injective ⇔ chaque droite coupe la courbe **au plus une fois** ;
- f surjective ⇔ chaque droite coupe la courbe **au moins une fois** ;
- f bijective ⇔ chaque droite coupe la courbe **exactement une fois**.

Propriété utile : une fonction **strictement monotone** sur un intervalle I est injective sur I.

PIÈGES

- La surjectivité dépend de l'**ensemble d'arrivée** : $x \mapsto x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $[0 ; +\infty[$.
- Pour la surjectivité, ne pas oublier de vérifier que la solution trouvée **appartient à** E.

💡 **بالعربية**

التطبيق **تباييني** إذا كان $f(a) = f(b)$ يستلزم $a = b$ (لكل عنصر من F سابق واحد على الأكثر). **شمولي** إذا كان لكل عنصر y من F سابق على الأقل. **تقابلي** إذا كان تباينيا وشموليا (لكل y سابق وحيد).

6 Application réciproque d'une bijection

التقابل العكسي

DÉFINITION — APPLICATION RÉCIPROQUE

Si $f : E \to F$ est **bijective**, l'application qui à chaque $y \in F$ associe son **unique antécédent** $x \in E$ s'appelle l'**application réciproque** de f, notée $f^{-1} : F \to E$.

$$y = f(x) \text{ avec } x \in E \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ avec } y \in F$$

PROPRIÉTÉS

$$f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F$$

- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Réciproquement, s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.
- Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques par rapport à la droite** $y = x$.

MÉTHODE COMPLÈTE

Montrer que $f :]1 ; +\infty[\to]2 ; +\infty[, x \mapsto (2x + 1)/(x - 1)$ est bijective et déterminer f^{-1}.

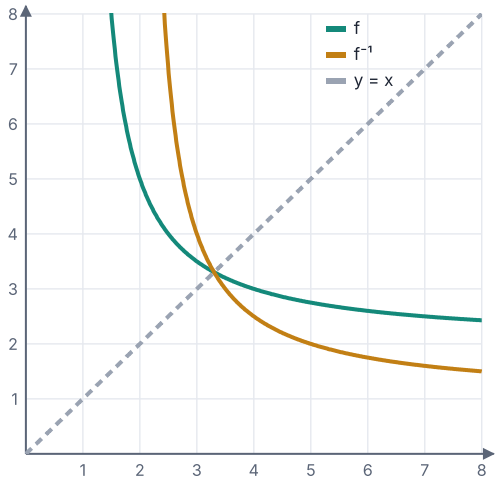
1. f est bien à valeurs dans $]2 ; +\infty[$: $f(x) - 2 = 3/(x - 1) > 0$ pour $x > 1$.

2. Résolution : soit $y > 2$. Pour $x > 1$:
$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y(x - 1) \Leftrightarrow x(y - 2) = y + 1 \Leftrightarrow x = (y + 1)/(y - 2)$ (car $y \neq 2$).

3. Vérification : $x - 1 = 3/(y - 2) > 0$, donc $x \in]1 ; +\infty[$.

Chaque $y > 2$ a un unique antécédent : f est bijective et

$$f^{-1} :]2 ; +\infty[\to]1 ; +\infty[, x \mapsto (x + 1)/(x - 2)$$



PIÈGE

$f^{-1}(x)$ (réciproque) n'est **pas** $1/f(x)$ (inverse) ! Pour $f(x) = 3x - 5$: $f^{-1}(x) = (x + 5)/3$ alors que $1/f(x) = 1/(3x - 5)$.

بالعربية

إذا كان f **تقابلا** من E نحو F، فإن **التقابل العكسي** f^{-1} يربط كل y من F بسابقه الوحيد. $f^{-1} \circ f = Id$ و $f \circ f^{-1} = Id$.
منحنيا f و f^{-1} **متماثلان** بالنسبة للمستقيم $y = x$. انتبه: f^{-1} ليس $1/f$.

7 Composition d'applications

تركيب التطبيقات

DÉFINITION — COMPOSÉE

Soient f : E → F et g : F → G. La **composée** de f par g est l'application :

$$g \circ f : E \to G,\ x \mapsto g(f(x))$$

Plus généralement, g ∘ f est définie dès que f(E) ⊂ ensemble de départ de g.

EXEMPLE

f : ℝ → ℝ, x ↦ x² + 1 et g : [0 ; +∞[→ ℝ, x ↦ √x. Comme f(ℝ) = [1 ; +∞[⊂ [0 ; +∞[, g ∘ f : ℝ → ℝ, x ↦ √(x² + 1).

f ∘ g : [0 ; +∞[→ ℝ, x ↦ (√x)² + 1 = x + 1. On voit que g ∘ f ≠ f ∘ g.

PROPRIÉTÉS

- La composition n'est **pas commutative** : en général g ∘ f ≠ f ∘ g.
- Elle est **associative** : h ∘ (g ∘ f) = (h ∘ g) ∘ f.
- $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$.

COMPOSÉE ET INJECTION, SURJECTION, BIJECTION

Soient f : E → F et g : F → G.

- f et g injectives ⇒ g ∘ f injective ;
- f et g surjectives ⇒ g ∘ f surjective ;
- f et g bijectives ⇒ g ∘ f bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (attention à l'ordre).
- g ∘ f injective ⇒ f injective ; g ∘ f surjective ⇒ g surjective.

DÉMONSTRATION : F, G INJECTIVES ⇒ G ∘ F INJECTIVE

Soient a, b ∈ E tels que g(f(a)) = g(f(b)). Comme g est injective, f(a) = f(b). Comme f est injective, a = b. ∎

DÉFINITION — INVOLUTION

Une application f : E → E telle que $f \circ f = Id_E$ est une **involution**. Elle est bijective et $f^{-1} = f$. Exemples : x ↦ −x sur ℝ, x ↦ 1/x sur ℝ*, une symétrie du plan.

PIÈGE

Pour calculer $g \circ f$, on applique **d'abord** f, puis g : on lit de droite à gauche. Et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: pour défaire, on commence par défaire la dernière opération effectuée.

💡 بالعربية

مركب f و g هو $g \circ f$ المعرف بـ $g(f(x))$: نطبق f أولا ثم g. التركيب **غير تبادلي** لكنه **تجميعي**. إذا كان f و g تقابلين فإن $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8 Exercices

تمارين — حاول أولاً قبل قراءة التصحيح!

18 exercices classés par difficulté (6 sur les ensembles, 12 sur les applications). Les corrigés sont regroupés dans la partie suivante : cherche d'abord seul !

EXERCICE 1 — ÉCRIRE UN ENSEMBLE — APPLICATION

1. Écrire en extension : $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 3\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ divise } 12\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2x\}$.
2. Écrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles : $D = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \leq 2\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 4\}$.

EXERCICE 2 — OPÉRATIONS SUR DES INTERVALLES — APPLICATION

Dans $E = \mathbb{R}$, on pose $A = [-2 ; 4[$, $B =]1 ; 6]$ et $C =]-\infty ; 0]$.

Déterminer : $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $A \cap C$, $(A \cup B) \cap C$ et $C_{\mathbb{R}}(B \cup C)$.

EXERCICE 3 — ENSEMBLE DES PARTIES ET PRODUIT CARTÉSIEN — APPLICATION

Soient $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $F = \{a ; b\}$.

1. Écrire $\mathscr{P}(E)$. Combien a-t-il d'éléments ?
2. Écrire $E \times F$ et F^2.
3. Vrai ou faux : $\{1\} \in E$; $\{1\} \subset E$; $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$; $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$; $(1 ; a) \in F \times E$.

EXERCICE 4 — APPLICATION OU NON ? — APPLICATION

Dans chaque cas, dire si la relation définit une application de E dans F. Justifier.

1. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(x^2 - 1)$
2. $E = \mathbb{R}^+$, $F = \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} - 2$
3. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x - 1$
4. $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$, $n \mapsto n/2$
5. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, x est associé au réel y tel que $y^3 = x$

EXERCICE 5 — IMAGES ET ANTÉCÉDENTS — APPLICATION

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$.

1. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$ et $f(1 + \sqrt{2})$.
2. Déterminer les antécédents de 3, de -1 et de -2.
3. f est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 6 — IMAGE DIRECTE ET IMAGE RÉCIPROQUE APPLICATION

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer :

1. $f([-1 ; 2])$ et $f(]-3 ; -1])$
2. $f^{-1}([1 ; 4])$, $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}([-4 ; 9])$
3. Vérifier sur cet exemple que $f(f^{-1}([-4 ; 9])) \neq [-4 ; 9]$.

EXERCICE 7 — INJECTIVE ? SURJECTIVE ? APPLICATION

Étudier l'injectivité et la surjectivité de :

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$
2. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto E(n/2)$ (partie entière)
3. $h : \mathbb{R} \to [0 ; +\infty[$, $x \mapsto |x|$
4. $k : [0 ; +\infty[\to [0 ; +\infty[$, $x \mapsto x^2$

EXERCICE 8 — BIJECTION AFFINE ET RÉCIPROQUE APPLICATION

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2x + 7$ est bijective et déterminer f^{-1}.
2. Vérifier que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$.

EXERCICE 9 — DÉMONTRER UNE ÉGALITÉ D'ENSEMBLES APPROFONDISSEMENT

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Démontrer :

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$
3. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

EXERCICE 10 — ENSEMBLES DÉFINIS PAR DES CONDITIONS APPROFONDISSEMENT

On pose $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 3| < 3\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{(x + 1)} \leq 2\}$.

1. Écrire A, B et C sous forme d'intervalles.
2. Déterminer $A \cap B \cap C$ et $A \cup B$.
3. Comparer A et C (inclusion).

EXERCICE 11 — UNE HOMOGRAPHIE APPROFONDISSEMENT

Soit $f :]1 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (2x + 1)/(x - 1)$.

1. Montrer que f est injective.
2. f est-elle surjective de $]1 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que f induit une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser, et déterminer sa réciproque.

EXERCICE 12 — COMPOSITION APPROFONDISSEMENT

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 3$.

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Ont-elles la même expression ?
2. Résoudre $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.
3. f est bijective : déterminer f^{-1} et calculer $f^{-1} \circ f \circ g$.

EXERCICE 13 — APPLICATION DE $\mathbb{R}^2$ DANS $\mathbb{R}^2$ APPROFONDISSEMENT

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x ; y) \mapsto (x + y ; x - y)$.

1. Calculer $\varphi(1 ; 2)$ et déterminer les antécédents de $(4 ; 0)$.
2. Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.
3. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire une autre expression de φ^{-1}.

EXERCICE 14 — INVOLUTION APPROFONDISSEMENT

Soit $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $x \mapsto (x + 1)/(x - 1)$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Calculer $f \circ f$.
3. En déduire que f est bijective et donner f^{-1}.

EXERCICE 15 — DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE TYPE EXAMEN

Pour deux parties A et B de E, on définit la **différence symétrique** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Représenter $A \Delta B$ sur un diagramme et calculer $A \Delta B$ pour $A = [0 ; 3]$ et $B = [2 ; 5]$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \varnothing$ et $A \Delta E$.
4. Montrer que $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.

EXERCICE 16 — PROPRIÉTÉS DE LA COMPOSÉE TYPE EXAMEN

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Donner un exemple où $g \circ f$ est injective mais g n'est pas injective.
4. Application : soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1}.

EXERCICE 17 — IMAGE DE L'INTERSECTION TYPE EXAMEN

Soit $f : E \to F$ et A, A' deux parties de E.

1. Montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
2. Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = [-2 ; 0]$ et $A' = [0 ; 2]$, montrer que l'inclusion réciproque est fausse.
3. Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

EXERCICE 18 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN TYPE EXAMEN

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x/(1 + x^2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq f(x) \leq 1$. f est-elle surjective ?
2. Calculer $f(2)$ et $f(1/2)$. f est-elle injective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1 ; 1]$ (on résoudra $f(x) = y$ pour $y \in [-1 ; 1]$).
4. Soit g la restriction de f à $[1 ; +\infty[$. Montrer que g est une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur $]0 ; 1]$ et déterminer g^{-1}.

9 Corrigés détaillés

التصحيح المفصل للتمارين

CORRIGÉ 1 — ÉCRIRE UN ENSEMBLE

1. $A = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$; $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$; $x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0$, $C = \{0 ; 2\}$.

2. $|x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$: $D = [-1 ; 3]$. $x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2$: $F =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$.

CORRIGÉ 2 — OPÉRATIONS SUR DES INTERVALLES

$A \cap B =]1 ; 4[$; $A \cup B = [-2 ; 6]$; $A \setminus B = [-2 ; 1]$; $B \setminus A = [4 ; 6]$; $C_{\mathbb{R}}A =]-\infty ; -2[\cup [4 ; +\infty[$;
$A \cap C = [-2 ; 0]$; $(A \cup B) \cap C = [-2 ; 0]$; $B \cup C =]-\infty ; 0] \cup]1 ; 6]$, donc
$C_{\mathbb{R}}(B \cup C) =]0 ; 1] \cup]6 ; +\infty[$.

CORRIGÉ 3 — ENSEMBLE DES PARTIES ET PRODUIT CARTÉSIEN

1. $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{1 ; 2\} ; \{1 ; 3\} ; \{2 ; 3\} ; E\}$: $2^3 = 8$ éléments.

2. $E \times F = \{(1 ; a) ; (1 ; b) ; (2 ; a) ; (2 ; b) ; (3 ; a) ; (3 ; b)\}$; $F^2 = \{(a ; a) ; (a ; b) ; (b ; a) ; (b ; b)\}$.

3. Faux (c'est une partie, pas un élément) ; vrai ; vrai ; vrai ; faux (dans $F \times E$ le premier terme est dans F : c'est $(a ; 1)$).

CORRIGÉ 4 — APPLICATION OU NON ?

1. **Non** : 1 et −1 n'ont pas d'image. (C'est une application de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ dans $\mathbb{R}$.)
2. **Oui** : pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} - 2$ existe et est unique.
3. **Non** : $f(0) = -1 \notin \mathbb{R}^+$; l'image doit appartenir à l'ensemble d'arrivée.
4. **Non** : $1/2 \notin \mathbb{N}$, donc 1 n'a pas d'image dans $\mathbb{N}$.
5. **Oui** : tout réel x a une unique racine cubique réelle y (la fonction $y \mapsto y^3$ est strictement croissante et prend toutes les valeurs réelles).

CORRIGÉ 5 — IMAGES ET ANTÉCÉDENTS

1. $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f(-1) = 3$, $f(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 - 2 - 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = 1$.

2. $x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$: antécédents −1 et 3. $x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$: un seul antécédent 1. $x^2 - 2x = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -1$: **aucun** antécédent.

3. Non injective (3 a deux antécédents, ou $f(0) = f(2)$). Non surjective (−2 n'a pas d'antécédent).

CORRIGÉ 6 — IMAGE DIRECTE ET IMAGE RÉCIPROQUE

1. Sur $[-1 ; 0]$, f décroît de 1 à 0 ; sur $[0 ; 2]$ elle croît de 0 à 4 : $f([-1 ; 2]) = [0 ; 4]$. Sur $]-3 ; -1]$, f décroît de 9 (exclu) à 1 : $f(]-3 ; -1]) = [1 ; 9[$.

2. $1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq 2$: $[-2 ; -1] \cup [1 ; 2]$. $x^2 = -1$ impossible : $\varnothing$.
$-4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$: $[-3 ; 3]$.

3. $f([-3 ; 3]) = [0 ; 9] \neq [-4 ; 9]$: on a seulement $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

CORRIGÉ 7 — INJECTIVE ? SURJECTIVE ?

1. $2a = 2b \Rightarrow a = b$: **injective**. 1 n'a pas d'antécédent (impair) : **non surjective**.
2. $g(0) = g(1) = 0$: **non injective**. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $g(2m) = m$: **surjective**.
3. $h(-1) = h(1)$: **non injective**. Pour $y \geq 0$, $h(y) = y$: **surjective**.
4. Pour $a, b \geq 0$: $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$: injective. Pour $y \geq 0$, $k(\sqrt{y}) = y$: surjective. **Bijective**, $k^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

CORRIGÉ 8 — BIJECTION AFFINE ET RÉCIPROQUE

1. Pour $y \in \mathbb{R}$: $-2x + 7 = y \Leftrightarrow x = (7 - y)/2$, unique dans $\mathbb{R}$. f est bijective et $f^{-1}(x) = (7 - x)/2$.

2. $f(f^{-1}(x)) = -2 \times (7 - x)/2 + 7 = x$; $f^{-1}(f(x)) = (7 + 2x - 7)/2 = x$.

3. $-2x + 7 = (7 - x)/2 \Leftrightarrow -4x + 14 = 7 - x \Leftrightarrow x = 7/3$. (Le point d'intersection est sur la droite $y = x$: $f(7/3) = 7/3$.)

CORRIGÉ 9 — DÉMONTRER UNE ÉGALITÉ D'ENSEMBLES

1. $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$ et $(x \in A$ et $x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. ∎

2. Si $A = B$, les deux membres valent A. Réciproquement, si $A \cup B = A \cap B$: $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, et de même $B \subset A$. Donc $A = B$. ∎

3. Si $A \subset B$: tout $x \in A$ est dans B, donc $A \cap B = A$. Si $A \cap B = A$: $A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$. Si $A \cup B = B$: $A \subset A \cup B = B$. ∎

CORRIGÉ 10 — ENSEMBLES DÉFINIS PAR DES CONDITIONS

1. $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) \leq 0$: $A = [1 ; 4]$. $-3 < 2x - 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 3$: $B =]0 ; 3[$. Il faut $x \geq -1$ et $x + 1 \leq 4$: $C = [-1 ; 3]$.

2. $A \cap B \cap C = [1 ; 3[$; $A \cup B =]0 ; 4]$.

3. Aucune inclusion : $4 \in A$ mais $4 \notin C$; $0 \in C$ mais $0 \notin A$.

CORRIGÉ 11 — UNE HOMOGRAPHIE

1.
$f(a) = f(b) \Rightarrow (2a + 1)(b - 1) = (2b + 1)(a - 1) \Rightarrow 2ab - 2a + b - 1 = 2ab - 2b + a - 1 \Rightarrow -3a = -3b \Rightarrow a = b$.

2. $f(x) = 2 + 3/(x - 1) > 2$: par exemple 0 n'a pas d'antécédent. **Non surjective**.

3. Pour $y > 2$: $f(x) = y \Leftrightarrow x = (y + 1)/(y - 2)$, et $x - 1 = 3/(y - 2) > 0$. Donc $f(]1 ; +\infty[) =]2 ; +\infty[= J$ et f est une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur J, de réciproque $f^{-1}(x) = (x + 1)/(x - 2)$.

CORRIGÉ 12 — COMPOSITION

1. $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$; $(f \circ g)(x) = 2(x^2 + 3) - 1 = 2x^2 + 5$. Différentes.

2. $4x^2 - 4x + 4 = 2x^2 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 1 = 0$, $\Delta' = 4 + 2 = 6$, $x = (2 \pm \sqrt{6})/2$.

3. $f^{-1}(x) = (x + 1)/2$. Par associativité, $f^{-1} \circ f \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = Id \circ g = g$.

CORRIGÉ 13 — APPLICATION DE $\mathbb{R}^2$ DANS $\mathbb{R}^2$

1. $\varphi(1 ; 2) = (3 ; -1)$. $x + y = 4$ et $x - y = 0$: $x = y = 2$, antécédent unique $(2 ; 2)$.

2. Soit $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$. $x + y = a$ et $x - y = b \Leftrightarrow x = (a + b)/2$ et $y = (a - b)/2$: solution unique. φ est bijective et $\varphi^{-1}(a ; b) = ((a + b)/2 ; (a - b)/2)$.

3. $\varphi(\varphi(x ; y)) = \varphi(x + y ; x - y) = (2x ; 2y)$, soit $\varphi \circ \varphi = 2\,Id$. Donc $\varphi \circ (½\varphi) = Id$ et $(½\varphi) \circ \varphi = Id$: $\varphi^{-1} = ½\,\varphi$, ce qui redonne le résultat du 2.

CORRIGÉ 14 — INVOLUTION

1. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$, impossible : $f(x) \neq 1$.

2. $f(f(x)) = ((x + 1)/(x - 1) + 1)/((x + 1)/(x - 1) - 1) = (2x/(x - 1))/(2/(x - 1)) = x$. Donc $f \circ f = Id_{\mathbb{R}-\{1\}}$.

3. f est une involution : elle est bijective et $f^{-1} = f$.

CORRIGÉ 15 — DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE

1. Ce sont les éléments qui sont dans **un seul** des deux ensembles. $A \setminus B = [0 ; 2[$ et $B \setminus A =]3 ; 5]$: $A \Delta B = [0 ; 2[\cup]3 ; 5]$.

2. $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow$ x est dans A ou dans B, mais pas dans les deux $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ et $x \notin B$) ou ($x \in B$ et $x \notin A$) $\Leftrightarrow x \in A \Delta B$. ∎

3. $A \Delta A = \varnothing$; $A \Delta \varnothing = A$; $A \Delta E = E \setminus A = C_E A$.

4. Si $A = B$, $A \Delta B = A \Delta A = \varnothing$. Si $A \Delta B = \varnothing$, alors $A \setminus B = \varnothing$ (donc $A \subset B$) et $B \setminus A = \varnothing$ (donc $B \subset A$) : $A = B$. ∎

CORRIGÉ 16 — PROPRIÉTÉS DE LA COMPOSÉE

1. Si $f(a) = f(b)$, alors $g(f(a)) = g(f(b))$, et comme $g \circ f$ est injective, $a = b$. ∎

2. Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ avec $g(f(x)) = z$: $y = f(x) \in F$ est un antécédent de z par g. ∎

3. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$: $g \circ f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ est injective, mais g ne l'est pas ($g(-1) = g(1)$).

4. Posons $g = f \circ f$. Par associativité, $f \circ g = f \circ f \circ f = Id_E$ et $g \circ f = f \circ f \circ f = Id_E$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g = f \circ f$. (On peut aussi utiliser 1 et 2 : $Id_E = (f \circ f) \circ f$ est injective donc f est injective, et $Id_E = f \circ (f \circ f)$ est surjective donc f est surjective.)

CORRIGÉ 17 — IMAGE DE L'INTERSECTION

1. Soit $y \in f(A \cap A')$: $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $x \in A'$, donc $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$. ∎

2. $A \cap A' = \{0\}$, $f(A \cap A') = \{0\}$, alors que $f(A) = f(A') = [0 ; 4]$, donc $f(A) \cap f(A') = [0 ; 4] \not\subset \{0\}$.

3. Soit $y \in f(A) \cap f(A')$: $y = f(a)$ avec $a \in A$ et $y = f(a')$ avec $a' \in A'$. Par injectivité, $a = a'$, donc $a \in A \cap A'$ et $y \in f(A \cap A')$. Avec le 1, on a l'égalité. ∎

CORRIGÉ 18 — SYNTHÈSE — TYPE EXAMEN

1. $1 - f(x) = (x-1)^2/(1+x^2) \geq 0$ et $1 + f(x) = (x+1)^2/(1+x^2) \geq 0$. Donc $f(\mathbb{R}) \subset [-1 ; 1]$: par exemple 2 n'a pas d'antécédent, f n'est **pas surjective**.

2. $f(2) = 4/5$ et $f(1/2) = 1/(5/4) = 4/5$: f n'est **pas injective**.

3. Si $y = 0$: $x = 0$ convient. Si $y \neq 0$: $f(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$, de discriminant réduit $\Delta' = 1 - y^2 \geq 0$ pour $y \in [-1 ; 1]$: il y a des solutions réelles. Donc tout $y \in [-1 ; 1]$ a un antécédent : $f(\mathbb{R}) = [-1 ; 1]$.

4. Pour $x \geq 1$, $f(x) > 0$ et $f(x) \leq 1$: g est à valeurs dans $]0 ; 1]$. Soit $y \in]0 ; 1]$: les solutions de $yx^2 - 2x + y = 0$ sont $x_1 = (1 - \sqrt{(1-y^2)})/y$ et $x_2 = (1 + \sqrt{(1-y^2)})/y$, de produit $x_1 x_2 = 1$. Comme $x_2 \geq 1/y \geq 1$ et $x_1 = 1/x_2 \leq 1$ (avec égalité seulement si $y = 1$, où $x_1 = x_2 = 1$), il y a exactement une solution dans $[1 ; +\infty[$: x_2. Donc g est bijective et

$$g^{-1} :]0 ; 1] \to [1 ; +\infty[,\ x \mapsto (1 + \sqrt{(1-x^2)})/x$$

10 Fiche résumé

ملخص الدرس — للمراجعة السريعة

Les ensembles en un coup d'œil

Je dois…	Méthode	بالعربية
montrer A ⊂ B	prendre x ∈ A quelconque et montrer x ∈ B	التضمين
montrer A = B	double inclusion, ou équivalences x ∈ A ⇔ … ⇔ x ∈ B	تساوي مجموعتين
calculer un complémentaire	lois de Morgan, préciser E	المتمم
compter les parties de E	card $\mathscr{P}(E) = 2^n$	مجموعة الأجزاء

Quelle méthode pour quelle question ?

Je dois…	Méthode	بالعربية
vérifier qu'une relation est une application	existence et unicité de l'image dans F	تطبيق
calculer f(A)	variations de f sur A	الصورة المباشرة
calculer $f^{-1}(B)$	résoudre f(x) ∈ B dans E	الصورة العكسية
montrer que f est injective	f(a) = f(b) ⇒ a = b	تبايني
montrer que f est surjective	y ∈ F quelconque, résoudre f(x) = y, vérifier x ∈ E	شمولي
montrer que f est non injective / non surjective	contre-exemple	مثال مضاد
trouver f^{-1}	résoudre y = f(x) en exprimant x en fonction de y	التقابل العكسي

L'ESSENTIEL

injective : au plus un antécédent

surjective : au moins un antécédent ⇔ f(E) = F

bijective : exactement un antécédent

$f^{-1} \circ f = Id_E$; $f \circ f^{-1} = Id_F$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

TOP 5 DES ERREURS

- Oublier les ensembles de départ et d'arrivée.
- Confondre $f^{-1}(x)$ et $1/f(x)$.
- Croire que $f^{-1}(B)$ n'existe que si f est bijective.
- Oublier de vérifier que l'antécédent trouvé est dans E.
- Écrire $g \circ f = f \circ g$.

Lexique français — arabe معجم المصطلحات

Français	العربية	Français	العربية
Ensemble	مجموعة	Image	صورة
Élément	عنصر	Antécédent	سابق
Ensemble vide	المجموعة الفارغة	Restriction	قصور
Inclusion	تضمين	Prolongement	تمديد
Partie	جزء	Image directe	الصورة المباشرة
Intersection	تقاطع	Image réciproque	الصورة العكسية
Réunion	اتحاد	Injective	تبايني
Complémentaire	متمم	Surjective	شمولي
Différence	فرق	Bijective	تقابلي
Produit cartésien	جداء ديكارتي	Application réciproque	التقابل العكسي
Couple	زوج	Composée	مركب
Application	تطبيق	Identité	التطبيق المطابق
Ensemble de départ	مجموعة الانطلاق	Involution	تطبيق التفافي
Ensemble d'arrivée	مجموعة الوصول		

Besoin d'aide sur ce chapitre ? Séance d'essai 100 % gratuite.

Cours en direct sur Google Meet · Petits groupes de 8 élèves max · Programme marocain · moraja3a.app · WhatsApp +212 617 638 536

احجز حصتك التجريبية المجانية على موقع moraja3a.app — افهم، تدرّب، انجح.